Корзун Назар
студент бакалаврату «Агроінженерія»
Науковий керівник: к.пед.н., доцент Корнійчук О.Е.
Житомирський агротехнічний коледж
м. Житомир

МАТЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСУ

Важливим та першочерговим завданням розробки механічних конструкцій і систем усіх видів є запобігання руйнівної дії резонансних коливань. Резонанс – це явище стрімкого зростання амплітуди вимушених незатухаючих коливань системи (рис.1). Причиною резонансу є збіг зовнішньої (збудливої) частоти із внутрішньою (власною) частотою коливальної системи. Це явище зустрічається в астрофізиці, електроніці, оптиці, акустиці. Проте найчастіше резонанс відбувається у класичній будівельній механіці, а також у гідро- та аеромеханіці. На жаль, у багатьох випадках це явище виникає саме тоді, коли воно є абсолютно небажаним.

Одним із кроків вирішення цієї проблеми є розв'язання задачі щодо визначення власної частоти коливань системи та складання диференціального рівняння цих коливань. Розглянемо рівняння, яке було отримане при дослідженні диференційних моделей механічних систем [1]:

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \qquad (1)$$

Це рівняння описує рух тіла масою m, що закріплене до пружини (жорсткості k) та з'єднане з амортизатором (із коефіцієнтом поглинання c), на яке діє зовнішня сила $F(t)$. Механізми з обертовими частинами зазвичай містять системи, які складаються з тіла, закріпленого на пружині з амортизатором (або еквівалентні до них), і зовнішня сила в яких є гармонічною: $F = F_0 cos\omega t$ або $F = F_0 sin\omega t$, де стала F_0 – амплітуда періодичної сили, а ω – її кругова частота.

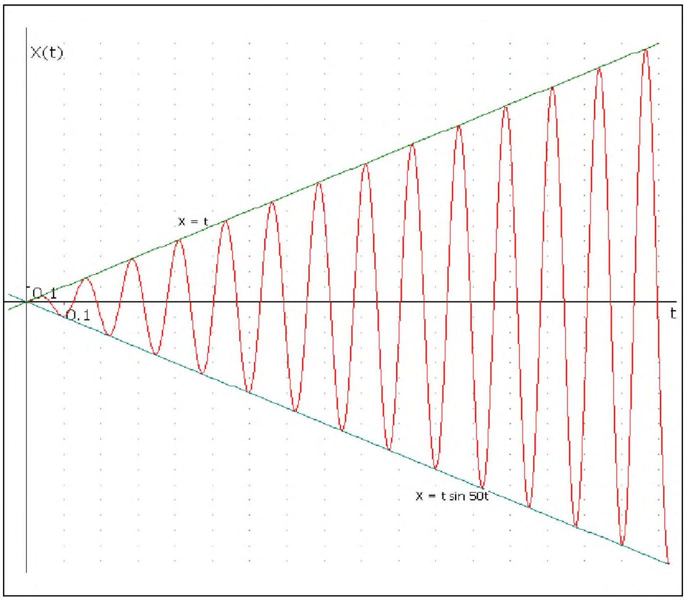

Рис. 1. **Явище резонансу**

Для вивчення вимушених коливань – незатухаючих коливань під дією зовнішньої сили $F(t) = F_0 cos\omega t$, покладемо у рівнянні (1) $c = 0$. Отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння:

$$mx'' + kx = F_0 cos\omega t. \quad (2)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $mx'' + kx = 0$:

$$x_c = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sin\omega_0 t,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – (кругова, або циклічна) **власна частота** коливань системи, яка складається з тіла, закріпленого на пружині. Припустимо спочатку, що зовнішня і власна частоти не рівні: $\omega \neq \omega_0$. Щоб знайти частинний розв'язок, підставимо $x_p = Acos\omega t$ у рівняння (2). (Доданок з синусом не включаємо в x_p, оскільки у лівій частині рівняння (2) немає x'). Отримаємо:

$-m\omega^2 Acos\omega t + kAcos\omega t = F_0 cos\omega t,$ звідки

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

тому

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega t. \quad (4)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2) $x = x_c + x_p$ має вигляд:

$$x(t) = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sin\omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega t, \quad (5)$$

де сталі c_1 і c_2 визначаються початковими умовами $x(0)$ і $x'(0)$. Рівняння (5) можна подати у вигляді:

$$x(t) = Ccos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega t. \quad (6)$$

Тому результуючий рух є суперпозицією двох коливань: одного – з власною частотою ω_0, а другого – з частотою зовнішньої сили ω.

З рівняння (4) видно, що якщо власна частота ω_0 наближено дорівнює зовнішній частоті ω, то амплітуда A в розв'язку x_p буде нескінченно великою. Іноді корисно записати рівняння (3) у вигляді

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_0)^2} = \pm\frac{\rho F_0}{k}. \qquad (7)$$

Тут F_0/k називається **статичним зміщенням** пружини з жорсткістю k під дією сталої сили F_0, а ρ – **коефіцієнт посилення**:

$$\rho = \frac{1}{|1-(\omega/\omega_0)^2|}. \qquad (8)$$

Очевидно, що $\rho \to +\infty$ при $\omega \to \omega_0$ Це явище **резонансу** – необмежене зростання (при $\omega \to \omega_0$) амплітуди коливання (за відсутністю сил опору) з власною частотою ω_0 під дією зовнішньої сили з частотою $\omega \approx \omega_0$.

Ми припускали, що $\omega \neq \omega_0$. Якої катастрофи слід очікувати, якщо ω і ω_0 точно збігаються? При цьому рівняння (2), після поділу всіх доданків на m, набуває вигляду:

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega_0 t. \qquad (9)$$

Оскільки $cos\omega_0 t$ є складовою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, то згідно методу невизначених коефіцієнтів слід шукати частинний розв'язок у вигляді $x_p(t) = t(Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t)$.

Підставимо цей вираз в рівняння (9), отримаємо: $A = 0,\ B = F_0/(2m\omega_0)$. Таким чином частинний розв'язок є функція:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t sin\omega_0 t. \qquad (10)$$

Геометричну інтерпретацію цього розв'язку проведено за допомогою пакету GRAN1 (рис.1). Математичне моделювання систем, аналіз їх параметрів можливо проводити й у більш потужних системах комп'ютерної математики, таких, як Maple, MathCAD та ін. Приклади моделей та методи їх візуалізації засобами зазначених технологій наведено у роботах [2; 3; 4; 5; 6; 7]

За графіком функції $x_p(t)$ при $m = 1,\ F_0 = 100,\ \omega_0 = 50$ (рис. 1) усвідомлюємо, як необмежено має зростати амплітуда коливань у разі чистого резонансу при $\omega = \omega_0$. Це явище можна розглядати, як посилення власних коливань системи під дією зовнішніх коливань тієї ж частоти.

На практиці механічна система з дуже малим загасанням під дією резонансних коливань може зламатися. Явище резонансу може бути причиною руйнування мостів, будівель та інших споруд, якщо власні частоти їх коливань збігаються з частотою сили, що діє періодично, наприклад, через обертання незбалансованого мотору. Але резонанс може бути не лише шкідливим. Корисні прояви резонансу спостерігаємо у підсиленні звуку музичних інструментів завдяки корпусу гітари та міхів баяну, налаштування радіоприймача на частоту радіостанції. Отже, головне – розрахувати і правильно обрати потрібну частоту.

Література

1. Корнійчук О.Е. Дослідження диференційних моделей механічних систем. Збірник наук. праць міжнар. конф. «Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості і транспорту 2018» / НГУ. Дніпро : НГУ, 2018. С. 345-349.

2. Корнійчук О. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі MathCAD. *Математика в школі*. 2006. № 6. С. 35-41.

3. Корнійчук О.Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту. *Комп'ютер у школі та сім'ї*. 2012. № 8 (104). С. 12-16.

4. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики. Збірник наук. праць міжнар. конф. «Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості і транспорту 2016» / НГУ. Дніпро : НГУ, 2016. С. 431-440.

5. Корнійчук О.Е. Вивчення похідної разом із Maple. *Фізико-математична освіта*. 2016. № 3. С. 61-69.

6. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства. *Фізико-математична освіта*. 2017. № 1. С. 62-67.

7. Корнійчук О.Е. Візуалізація екстремальних значень лінійної форми. *Фізико-математична освіта*. 2017. № 3. С. 72-77.