

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ЕНЕРГЕТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

*Кафедра інформаційних технологій,
фізико-математичних та безпекових дисциплін*

ОПЕРАЦІЙНЕ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю G22 Біомедична інженерія

Кам'янець-Подільський

2026

УДК 517.9+517.97(076.5)

Укладачі:

ДРАГАН Євгеній Вікторович – кандидат педагогічних наук, асистент кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін.

СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін.

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»
протокол № 5 від 27 травня 2026 р.*

Рецензенти:

ПОТАНІНА Тетяна Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри «Комп'ютерна математика і аналіз даних», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

КОЗАК Олександр Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри електротехніки, електромеханіки і електротехнологій, Заклад вищої освіти «Подільський державний університет».

Операційне та варіаційне числення. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G22 Біомедична інженерія / Є.В. ДРАГАН, І.В.СЕМЕНИШИНА. Кам'янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 2026. 27 с.

Методичні рекомендації містять теоретичні відомості, покрокові приклади роботи у системі комп'ютерної алгебри wxMaxima, індивідуальні завдання (5 варіантів) та контрольні питання до кожної з 10 лабораторних робіт. Охоплюють розділи операційного числення (перетворення Лапласа, диференціальні рівняння, системи) та варіаційного числення (рівняння Ейлера, ізопериметричні задачі, класичні задачі).

© ЗВО «ПДУ», 2026

ЗМІСТ

Передмова	4
Вступ до wxMaxima	5
Лабораторна робота № 1. Пряме перетворення Лапласа	6
Лабораторна робота № 2. Обернене перетворення Лапласа	8
Лабораторна робота № 3. Диференціальні рівняння першого порядку ...	10
Лабораторна робота № 4. Диференціальні рівняння другого порядку	12
Лабораторна робота № 5. Системи диференціальних рівнянь	14
Лабораторна робота № 6. Рівняння Ейлера	16
Лабораторна робота № 7. Варіаційні задачі з рухомими кінцями	18
Лабораторна робота № 8. Ізопериметрична задача	20
Лабораторна робота № 9. Задача Больца та умовний екстремум	22
Лабораторна робота № 10. Класичні задачі варіаційного числення	24
Рекомендована література	26

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «Операційне та варіаційне числення» є обов'язковою компонентою підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G22 Біомедична інженерія. Вона забезпечує фундаментальну математичну підготовку, необхідну для вивчення фахових дисциплін, пов'язаних із моделюванням біомедичних процесів, теорією сигналів та системним аналізом.

Методичні рекомендації охоплюють 10 лабораторних робіт, об'єднаних у два змістові блоки: операційне числення (роботи 1–5) та варіаційне числення (роботи 6–10). Виконання всіх робіт здійснюється у системі комп'ютерної алгебри wxMaxima — безкоштовному програмному середовищі з графічним інтерфейсом, спеціально призначеному для символічних математичних обчислень.

Кожна лабораторна робота містить:

- стислі теоретичні відомості з опорними формулами;
- покроковий приклад виконання у wxMaxima з коментарями;
- таблицю індивідуальних завдань (5 варіантів);
- вимоги до звіту;
- контрольні запитання.

Виконання лабораторних робіт сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти практичних навичок застосування математичних методів до задач аналізу динамічних систем, оптимізації та моделювання що є безпосередньо затребуваним у біомедичній інженерії.

ВСТУП ДО wxMAXIMA

Встановлення та запуск

wxMaxima — безкоштовна система комп'ютерної алгебри з графічним інтерфейсом. Завантажити можна з офіційного сайту: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

Після запуску відкривається вікно з полем введення команд. Команди виконуються клавішами Shift+Enter.

Основні команди для курсу

Операційне числення:

```
laplace(f(t), t, s); /* пряме перетворення L{f(t)} */
ilt(F(s), s, t);    /* обернене перетворення L-1{F(s)} */
*/
load(laplace)$     /* завантажити пакет (якщо потрібно) */
```

Диференціальні рівняння:

```
ode2(рівняння, y, x); /* розв'язок ДР */
ic1(%, x=0, y=0);    /* початкові умови для ДР 1-го порядку */
ic2(%, x=0, y=0, 'diff(y,x)=0); /* для ДР 2-го порядку */
```

Варіаційне числення:

```
load(variational)$ /* пакет для рівняння Ейлера */
*/
euler_lagrange(F, x, y(x)); /* рівняння Ейлера для інтегранда F */
```

Графіки:

```
wxplot2d([f(x)], [x, a, b]); /* побудова графіка */
wxplot2d([[parametric, x(t), y(t), [t, 0, 1]]]);
```

Збереження файлу: File → Save. Формат файлу — .wxmx.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Пряме перетворення Лапласа

1. Мета роботи

Набути практичних навичок обчислення прямого перетворення Лапласа для різних класів функцій за допомогою wxMaxima; дослідити вплив параметрів на зображення.

2. Теоретичні відомості

Пряме перетворення Лапласа: $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$.

Основні пари перетворення Лапласа:

- $L\{1\} = 1/s$
- $L\{t^n\} = n! / s^{(n+1)}$
- $L\{e^{at}\} = 1/(s-a)$
- $L\{\sin(\omega t)\} = \omega/(s^2+\omega^2)$
- $L\{\cos(\omega t)\} = s/(s^2+\omega^2)$
- $L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$ (теорема зміщення)
- $L\{t \cdot f(t)\} = -dF(s)/ds$

3. Приклад виконання

Завдання: знайти $F(s) = L\{t^2 \cdot e^{-3t}\}$ та дослідити вплив параметра a .

Крок 1. Обчислення зображення:

```
f: t^2 * exp(-3*t);
F: laplace(f, t, s);
/* Результат: F(s) = 2/(s+3)^3 */
```

Крок 2. Дослідження впливу параметра a :

```
for a in [1, 2, 3, 5] do (
  F_a: laplace(t^2*exp(-a*t), t, s),
  print("a=", a, " F(s)=", F_a)
);
```

Крок 3. Візуалізація оригіналу:

```
wxplot2d([t^2*exp(-t), t^2*exp(-2*t), t^2*exp(-3*t)],
  [t, 0, 5], [legend, "a=1", "a=2", "a=3"]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Знайти $F(s) = L\{f(t)\}$	Знайти $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$
1	$f(t) = 3t^2 - 2e^{-t}$	$F(s) = 4 / (s^2 + 16)$
2	$f(t) = e^{2t} \cdot \cos(3t)$	$F(s) = 2 / ((s-1)^2 + 9)$
3	$f(t) = t \cdot \sin(2t)$	$F(s) = (s+1) / (s^2 + 4s + 5)$
4	$f(t) = \cos^2(t)$	$F(s) = 6 / (s^3 + 9s)$
5	$f(t) = 5 \cdot \sinh(2t)$	$F(s) = 1 / (s^2 - 6s + 10)$

Для кожного варіанта також побудуйте графік оригіналу $f(t)$ на проміжку $[0, 5]$ та проведіть перевірку: застосуйте laplace до знайденого оригіналу і порівняйте з вихідним зображенням.

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Команди wxMaxima з коментарями.
3. Результати обчислень (зображення та оригінали).
4. Графіки оригіналів.
5. Перевірка результатів.
6. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Дайте означення перетворення Лапласа.
2. Що таке оригінал і зображення?
3. Сформулюйте теорему лінійності.
4. Як пов'язані $L\{t \cdot f(t)\}$ та $F(s)$?
5. Яка команда wxMaxima обчислює $L\{f(t)\}$?
6. Як перевірити правильність результату?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Обернене перетворення Лапласа

1. Мета роботи

Навчитися знаходити оригінали за заданими зображеннями методом розкладання на найпростіші дроби та за допомогою таблиць, автоматизуючи обчислення в wxMaxima.

2. Теоретичні відомості

Обернене перетворення: $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ знаходять:

- за таблицями стандартних пар;
- методом розкладання на найпростіші дроби (partial fractions);
- через теорему про лишки (для складних зображень).

Метод найпростіших дроби: якщо $F(s) = P(s)/Q(s)$, то $Q(s)$ розкладають на множники і записують:

$F(s) = A_1/(s-s_1) + A_2/(s-s_2) + \dots$ де A_i знаходять зі співвідношень.

3. Приклад виконання

Завдання: знайти $f(t) = L^{-1}\{(2s+3)/(s^2+3s+2)\}$.

Крок 1. Розкладання на дроби:

```
F: (2*s+3)/(s^2+3*s+2);  
partfrac(F, s);  
/* (2s+3)/((s+1)(s+2)) = 1/(s+1) + 1/(s+2) */
```

Крок 2. Обернене перетворення:

```
ilt(F, s, t);  
/* f(t) = e^(-t) + e^(-2t) */
```

Крок 3. Перевірка:

```
laplace(exp(-t)+exp(-2*t), t, s);  
ratsimp(%);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Знайти $L^{-1}\{F(s)\}$ методом розкладання	Знайти $L^{-1}\{F(s)\}$ через дроби
1	$F(s) = (3s+2)/(s^2+3s+2)$	$F(s) = 5/(s(s+1)(s+2))$
2	$F(s) = (s+4)/(s^2+5s+6)$	$F(s) = 2s/((s+1)(s^2+4))$

Вар.	Знайти $L^{-1}\{F(s)\}$ методом розкладання	Знайти $L^{-1}\{F(s)\}$ через дроби
3	$F(s) = (2s+1) / (s^2+4s+3)$	$F(s) = 3 / (s^2(s+1))$
4	$F(s) = s / (s^2+2s+5)$	$F(s) = (s+2) / (s(s^2+1))$
5	$F(s) = (s+3) / (s^2+6s+9)$	$F(s) = 4 / ((s+1)^2(s+2))$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Розкладання $F(s)$ на найпростіші дроби (вручну та через `partfrac`).
3. Команди `ilt()` з результатами.
4. Перевірка через `laplace()`.
5. Висновки про метод.

6. Контрольні питання

1. У чому суть методу найпростіших дробів?
2. Яка команда `wxMaxima` виконує розкладання на дроби?
3. Яка команда обчислює обернене перетворення?
4. Як перевірити знайдений оригінал?
5. Коли зручніше використовувати таблиці, а коли — `ilt()`?
6. Що таке полюс зображення і як він пов'язаний з оригіналом?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Мета роботи

Навчитися розв'язувати лінійні диференціальні рівняння першого порядку операційним методом (через перетворення Лапласа) та порівнювати результати з класичними розв'язками.

2. Теоретичні відомості

Операційний метод розв'язування ДР:

- Застосувати перетворення Лапласа до обох частин рівняння.
- Врахувати початкові умови: $L\{y'\} = s \cdot Y(s) - y(0)$.
- Знайти зображення $Y(s) = F(s)/Q(s)$.
- Застосувати обернене перетворення: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.

У wxMaxima ДР також розв'язують командою `ode2()` з подальшим застосуванням початкових умов через `ic1()`.

3. Приклад виконання

Завдання: розв'язати $y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$.

Спосіб 1. Операційний метод:

```
/* s·Y - y(0) + 2Y = 1/(s+1) => Y(s·+2) = 1/(s+1) */
Y: 1/((s+1)*(s+2));
y_sol: ilt(Y, s, t);
/* y(t) = e^(-t) - e^(-2t) */
```

Спосіб 2. Через `ode2`:

```
eq: 'diff(y,t) + 2*y = exp(-t);
sol: ode2(eq, y, t);
ic1(sol, t=0, y=0);
```

Крок 3. Графік розв'язку:

```
wxplot2d([exp(-t)-exp(-2*t)], [t, 0, 5]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Рівняння, $y(0)=0$	Рівняння, $y(0)=1$
1	$y' + 2y = e^{-t}$	$y' - y = \sin(t)$
2	$y' + y = \cos(t)$	$y' + 3y = e^{2t}$

Вар.	Рівняння, $y(0)=0$	Рівняння, $y(0)=1$
3	$y' - 3y = \sin(2t)$	$y' + 2y = t$
4	$y' + 4y = e^{-2t}$	$y' - 2y = \cos(t)$
5	$y' + y = t^2$	$y' + y = e^{-t} \cdot t$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Розв'язання операційним методом (крок за кроком).
3. Розв'язання через ode2 (для порівняння).
4. Графік розв'язку $y(t)$ на $[0, 5]$.
5. Порівняння двох методів. Висновки.

6. Контрольні питання

1. У чому переваги операційного методу перед класичним?
2. Як перетворення Лапласа враховує початкові умови?
3. Що таке зображення $Y(s)$ задачі Коші?
4. Як розв'язати ДР через ode2 у wxMaxima?
5. Чому результати обох методів мають збігатися?
6. Як побудувати графік розв'язку у wxMaxima?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Диференціальні рівняння другого порядку

1. Мета роботи

Набути навичок розв'язування лінійних ДР другого порядку з постійними коефіцієнтами операційним методом та аналізу отриманих розв'язків графічно.

2. Теоретичні відомості

Для ДР другого порядку:

$$L\{y''\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$$

$$L\{y'\} = s \cdot Y(s) - y(0)$$

Загальна схема:

- Застосувати L до рівняння, підставити початкові умови.
- Виразити Y(s) алгебраїчно.
- Знайти $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.
- Побудувати графік y(t).

3. Приклад виконання

Завдання: $y'' + 4y = \cos(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Операційний метод:

```
/* (s^2+4)Y(s) = s/(s^2+1) */  
Y: s/((s^2+4)*(s^2+1));  
y_sol: ilt(Y, s, t);  
/* y(t) = (cos(t) - cos(2t))/3 */
```

Через ode2 + ic2:

```
eq: 'diff(y,t,2) + 4*y = cos(t);  
sol: ode2(eq, y, t);  
ic2(sol, t=0, y=0, 'diff(y,t)=0);
```

Графік:

```
wxplot2d([(cos(t)-cos(2*t))/3], [t, 0, 10]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Рівняння, $y(0)=y'(0)=0$	Рівняння, $y(0)=1, y'(0)=0$
1	$y'' + 4y = \cos(t)$	$y'' + y = e^{-t}$

Вар.	Рівняння, $y(0)=y'(0)=0$	Рівняння, $y(0)=1, y'(0)=0$
2	$y'' + 2y' + y = e^{-t}$	$y'' + 4y = \sin(2t)$
3	$y'' - y = t \cdot e^t$	$y'' + 2y' + 5y = 1$
4	$y'' + y = t$	$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$
5	$y'' + 4y' + 4y = t^2$	$y'' - 4y = \cosh(t)$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Розв'язання операційним методом.
3. Перевірка через ode2 + ic2.
4. Графік $y(t)$ на $[0, 10]$.
5. Фізична інтерпретація поведінки розв'язку. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Запишіть формулу $L\{y''\}$ через $Y(s)$ та початкові умови.
2. Що таке резонанс у ДР і як його виявити через зображення?
3. Яка команда wxMaxima розв'язує ДР другого порядку?
4. Як задаються початкові умови для ДР другого порядку в wxMaxima?
5. Що показує графік розв'язку ДР другого порядку?
6. Як пов'язані полюси $Y(s)$ з типом коливань?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Системи диференціальних рівнянь

1. Мета роботи

Навчитися розв'язувати системи лінійних ДР першого порядку операційним методом та будувати фазові портрети системи.

2. Теоретичні відомості

Для системи $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ з початковими умовами $x(0)$, $y(0)$:

- Застосувати L до кожного рівняння системи.
- Отримати алгебраїчну систему відносно $X(s)$, $Y(s)$.
- Розв'язати систему методом Крамера або підстановки.
- Знайти $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$, $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.

Фазовий портрет — це крива $(x(t), y(t))$ на площині (x, y) .

3. Приклад виконання

Завдання: $x' = y$, $y' = -x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Операційний метод:

```
/* sX - 1 = Y; sY = -X => X(s^2+1) = s => X = s/(s^2+1) */
X: s/(s^2+1);
Y_s: 1/(s^2+1);
x_sol: ilt(X, s, t); /* cos(t) */
y_sol: ilt(Y_s, s, t); /* sin(t) */
```

Фазовий портрет:

```
wxplot2d([[parametric, cos(t), sin(t), [t, 0, 2*pi]]],
         [legend, "фазова траєкторія"]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Система $(x(0)=1, y(0)=0)$	Система $(x(0)=0, y(0)=1)$
1	$x' = y; y' = -x$	$x' = x+y; y' = x-y$
2	$x' = -x+y; y' = x$	$x' = 2x+y; y' = -x+2y$
3	$x' = x+2y; y' = -y$	$x' = y; y' = x+e^t$
4	$x' = -2x+y; y' = x-2y$	$x' = x+e^t; y' = y+1$
5	$x' = x; y' = x+y$	$x' = 2y; y' = -2x+\sin(t)$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Розв'язання системи операційним методом.
3. Графіки $x(t)$ і $y(t)$ на одному рисунку.
4. Фазовий портрет системи.
5. Характеристика поведінки системи (стійкість, тип). Висновки.

6. Контрольні питання

1. Як операційний метод застосовується до системи ДР?
2. Що таке фазовий портрет системи?
3. Як пов'язані власні значення матриці системи з типом фазового портрета?
4. Що означає стійкість системи в термінах фазового портрета?
5. Як побудувати параметричний графік у wx_{Maxima} ?
6. Чим відрізняються «вузол», «фокус» та «центр» на фазовому портреті?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Рівняння Ейлера для найпростішої задачі варіаційного числення

1. Мета роботи

Ознайомитися з основною задачею варіаційного числення; навчитися складати та розв'язувати рівняння Ейлера для заданого функціонала у wxMaxima.

2. Теоретичні відомості

Найпростіша задача варіаційного числення: знайти функцію $y(x)$ з граничними умовами $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$, яка мінімізує функціонал:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Необхідна умова екстремуму — рівняння Ейлера: $\partial F/\partial y - d/dx(\partial F/\partial y') = 0$.

У wxMaxima рівняння Ейлера формується через пакет variational:

```
load(variational)$  
euler_lagrange(F, x, y(x));
```

3. Приклад виконання

Завдання: знайти екстремаль $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.

Крок 1. Рівняння Ейлера:

```
load(variational)$  
F: 'diff(y(x),x)^2 + y(x)^2;  
EL: euler_lagrange(F, x, y(x));  
/* y'' - y = 0 */
```

Крок 2. Розв'язок рівняння Ейлера:

```
sol: ode2(EL, y(x), x);  
/* y = C1*sinh(x) + C2*cosh(x) */
```

Крок 3. Граничні умови:

```
bc2(sol, x=0, y=0, x=1, y=1);  
/* y(x) = sinh(x)/sinh(1) */
```

Крок 4. Графік екстремалі:

```
wxplot2d([sinh(x)/sinh(1)], [x, 0, 1]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Знайти екстремаль функціонала	Граничні умови
1	$J[y] = \int (y'^2 + y^2) dx$	$y(0)=0, y(1)=1$
2	$J[y] = \int (y'^2 - y^2) dx$	$y(0)=0, y(\pi/4)=1$
3	$J[y] = \int (y'^2 + 2xy') dx$	$y(0)=0, y(1)=0$
4	$J[y] = \int (y^2 + y \cdot y') dx$	$y(0)=1, y(1)=e$
5	$J[y] = \int (y'^2 + 2y \cdot \sin(x)) dx$	$y(0)=0, y(\pi)=0$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Виведення рівняння Ейлера (команда `euler_lagrange`).
3. Розв'язок рівняння Ейлера з граничними умовами.
4. Графік екстремалі.
5. Висновки: чи є знайдена крива мінімумом або максимумом?

6. Контрольні питання

1. Сформулюйте основну задачу варіаційного числення.
2. Запишіть рівняння Ейлера у загальному вигляді.
3. Що таке екстремаль функціонала?
4. Як рівняння Ейлера спрощується, якщо F не залежить від y ?
5. Яка команда `wxMaxima` формує рівняння Ейлера?
6. Чим відрізняється задача варіаційного числення від задачі на екстремум функції?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Варіаційні задачі з рухомими кінцями

1. Мета роботи

Навчитися розв'язувати варіаційні задачі з вільними (рухомими) кінцями, застосовувати природні крайові умови та умови трансверсальності.

2. Теоретичні відомості

Якщо правий кінець кривої не фіксований, а лежить на кривій $g(x)$, то до рівняння Ейлера додається умова трансверсальності:

$$[F + (g' - y') \cdot F_{y'}]_{x=b} = 0.$$

Природна крайова умова (вільний кінець на прямій $x = b$):

$$F_{y'}|_{x=b} = 0.$$

3. Приклад виконання

Завдання: $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$, $y(0) = 0$, правий кінець — на $g(x) = x^2$.

```
load(variational) $
F: 'diff(y(x),x)^2 + y(x)^2;
EL: euler_lagrange(F, x, y(x));
sol: ode2(EL, y(x), x);
/* Застосувати: y(0)=0 і умову трансверсальності вручну */
/* F_y' = 2y', умова: 2y'(b) + (2b-2y'(b))=0 => 2b=0 =>
b=0? */
/* або: розв'язати систему для C1, C2 та b */
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Функціонал з рухомим правим кінцем	Права крайова крива
1	$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$	$g(x) = x^2$
2	$J[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2y) dx$	$g(x) = 2x$
3	$J[y] = \int_0^2 (y'^2 + y \cdot y') dx$	$g(x) = x$
4	$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2y) dx$	$g(x) = x^2 + 1$
5	$J[y] = \int_0^1 (y'^2) dx$	$g(x) = 1 - x$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Рівняння Ейлера та його розв'язок.

3. Умова трансверсальності та знаходження точки контакту.
4. Графік екстремалі та правої граничної кривої.
5. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Що таке задача з рухомим кінцем?
2. Запишіть умову трансверсальності.
3. Що таке природна крайова умова?
4. Чим відрізняється задача з рухомим кінцем від задачі з фіксованими кінцями?
5. Як геометрично інтерпретувати умову трансверсальності?
6. Як знаходять точку перетину екстремалі з граничною кривою?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Ізопериметрична задача

1. Мета роботи

Навчитися розв'язувати ізопериметричні задачі варіаційного числення методом множників Лагранжа.

2. Теоретичні відомості

Ізопериметрична задача: мінімізувати $J[y] = \int F dx$ при умові $G[y] = \int G dx = C$.

Метод: ввести допоміжний функціонал $H = F + \lambda \cdot G$ та скласти рівняння Ейлера для H :

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial H}{\partial y'}) = 0.$$

Константа λ (множник Лагранжа) визначається з умови $G[y] = C$.

3. Приклад виконання

Завдання: мінімізувати $J = \int_0^1 y'^2 dx$ при умові $\int_0^1 y dx = 1$, $y(0)=y(1)=0$.

```
/* H = y'^2 + lambda*y, рівняння Ейлера: 2y'' - lambda = 0 */
/* y = lambda/4 * x*(x-1) */
/* Умова: \int_0^1 y dx = lambda/4 * (-1/6) = 1 => lambda = -24 */
lam: -24;
y_sol: lam/4 * x*(x-1);
wxplot2d([y_sol], [x, 0, 1]);
```

Перевірка умови:

```
integrate(y_sol, x, 0, 1); /* має дорівнювати 1 */
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Мінімізувати функціонал	Ізопериметрична умова
1	$J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$	$\int_0^1 y dx = 1$
2	$J[y] = \int_0^1 y^p dx$	$\int_0^1 y'^2 dx = 1$
3	$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$	$\int_0^1 y dx = 2$
4	$J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$	$\int_0^1 y^2 dx = 1$
5	$J[y] = \int_0^1 y^2 dx$	$\int_0^1 y'^2 dx = 2$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Формулювання допоміжного функціонала H .
3. Рівняння Ейлера для H та його розв'язок.
4. Знаходження множника Лагранжа λ з ізопериметричної умови.
5. Графік знайденої кривої. Перевірка умови. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Що таке ізопериметрична задача?
2. У чому полягає метод множників Лагранжа у варіаційному численні?
3. Як формується допоміжний функціонал H ?
4. Як знаходять множник Лагранжа λ ?
5. Наведіть класичний приклад ізопериметричної задачі.
6. Чим ізопериметрична задача відрізняється від задачі умовного екстремуму функції?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Задача Больца та умовний екстремум

1. Мета роботи

Ознайомитися з постановкою задачі Больца як узагальнення задач варіаційного числення; навчитися розв'язувати задачі з голономними обмеженнями.

2. Теоретичні відомості

Задача Больца: мінімізувати функціонал

$$J = \varphi(x(T)) + \int_0^T F(x, u, t) dt$$

при динамічному обмеженні $\dot{x} = f(x, u, t)$, $x(0) = x_0$.

Особливі випадки: якщо $\varphi = 0$ — задача Лагранжа; якщо $F = 0$ — задача Майера.

Необхідна умова оптимальності — принцип максимуму Понтрягіна або рівняння Ейлера–Лагранжа для розширеного функціонала.

3. Приклад виконання

Завдання: мінімізувати $J = \int_0^1 u^2 dt$, $\dot{x} = u$, $x(0)=0$, $x(1)=1$.

```
/* Гамільтоніан:  $H = -u^2 + p \cdot u$ , умова:  $dH/du = -2u + p = 0 \Rightarrow u = p/2$  */  
/*  $\dot{p} = -dH/dx = 0 \Rightarrow p = \text{const} \Rightarrow u = \text{const}$  */  
/*  $x(t) = u \cdot t$ ,  $x(1)=1 \Rightarrow u=1$ ,  $x(t)=t$  */  
u_opt: 1;  
x_opt: t;  
J_min: integrate(u_opt^2, t, 0, 1); /*  $J = 1$  */  
wxplot2d([x_opt], [t, 0, 1]);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Термінальний функціонал	Голономне обмеження
1	$J = y(T)^2 + \int_0^T u^2 dt$	$\dot{x} = u$, $x(0)=0$
2	$J = x(1) + \int_0^1 u^2 dt$	$\dot{x} = -x+u$, $x(0)=1$
3	$J = -x(2) + \int_0^2 u^2 dt$	$\dot{x} = u$, $x(0)=1$
4	$J = x(1)^2 + \int_0^1 (x^2+u^2) dt$	$\dot{x} = u$, $x(0)=0$
5	$J = \int_0^1 (x^2+u^2) dt$	$\dot{x} = x+u$, $x(0)=1$, $x(1)=0$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Постановка задачі та формулювання Гамільтоніана.
3. Виведення оптимального керування $u^*(t)$.
4. Знаходження оптимальної траєкторії $x^*(t)$ та мінімального значення J .
5. Графіки $u^*(t)$ та $x^*(t)$. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Що таке задача Больца і чим вона узагальнює інші задачі варіаційного числення?
2. Що таке задачі Лагранжа та Майєра як окремі випадки задачі Больца?
3. Що таке Гамільтоніан задачі оптимального керування?
4. Сформулюйте принцип максимуму Понтрягіна (словесно).
5. Що таке спряжена змінна (co-state variable)?
6. Як знаходять оптимальне керування через умову стаціонарності Гамільтоніана?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10

Класичні задачі варіаційного числення

1. Мета роботи

Розв'язати класичні задачі варіаційного числення (брахістохрона, катеноїд, геодезична) у wxMaxima та дослідити геометричні та фізичні властивості розв'язків.

2. Теоретичні відомості

Брахістохрона (крива найшвидшого спуску): мінімізувати час спуску $T = \int ds/\sqrt{(2gy)}$. Розв'язок — циклоїда: $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$.

Катеноїд (мінімальна поверхня обертання): мінімізувати площу $S = 2\pi \int y\sqrt{(1+y'^2)}dx$. Розв'язок: $y = a \cdot \cosh((x-b)/a)$.

Геодезична на сфері: найкоротший шлях між двома точками на сфері. Розв'язок — дуга великого кола.

3. Приклад виконання: Брахістохрона

Задача: $A(0,0) \rightarrow B(1,-1)$, $g=9.81$.

```
/* Параметричний розв'язок: циклоїда */
R: 0.5; /* підібрати з умов */
x_c(th) := R*(th - sin(th));
y_c(th) := -R*(1 - cos(th));
wxplot2d([[parametric, x_c(th), y_c(th), [th, 0,
2*%pi]]],
  [xlabel, "x"], [ylabel, "y"],
  [legend, "брахістохрона"]);
```

Приклад: Катеноїд

```
a: 1; b: 0;
y_cat: a * cosh((x-b)/a);
wxplot2d([y_cat, -y_cat], [x, -2, 2],
  [legend, "катеноїд (верх)", "катеноїд (низ)"]);
/* Площа поверхні: */
S: 2*%pi * integrate(y_cat*sqrt(1+diff(y_cat,x)^2), x, -
1, 1);
```

4. Індивідуальні завдання

Вар.	Класична задача	Параметри
1	<i>Брахістохрона</i>	$A(0,0) \rightarrow B(1,-1)$

Вар.	Класична задача	Параметри
2	<i>Брахістохрона</i>	$A(0,0) \rightarrow B(2,-2)$
3	<i>Катеноїд між двома колами</i>	$x=-1, r_1=1; x=1, r_2=1$
4	<i>Геодезична на сфері радіуса $R=1$</i>	від $\varphi_0=0$ до $\varphi_1=\pi/2$
5	<i>Катеноїд між двома колами</i>	$x=-2, r_1=1; x=2, r_2=1$

5. Зміст звіту

1. Тема, мета, номер варіанта.
2. Постановка задачі та функціонал.
3. Рівняння Ейлера або відома формула розв'язку.
4. Команди wxMaxima та результати.
5. Графік кривої з поясненням.
6. Фізична або геометрична інтерпретація. Висновки.

6. Контрольні питання

1. Що таке брахістохрона і яка крива є її розв'язком?
2. Як параметрично задається циклоїда?
3. Що таке катеноїд і яка його рівняння?
4. Що таке геодезична лінія на поверхні?
5. Чому геодезична на сфері є дугою великого кола?
6. Яке спільне між брахістохроною, катеноїдом та геодезичною з точки зору варіаційного числення?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Краснов М. Л., Кисельов А. І., Макаренко Г. І. Інтегральні рівняння. — К.: Вища школа, 1990. — 215 с.
2. Гельфанд І. М., Фомін С. В. Варіаційне числення. — М.: Физматлит, 2004. — 228 с.
3. Бронштейн І. М., Семендяєв К. А. Довідник з математики для інженерів і студентів. — М.: Наука, 2009. — 608 с.
4. Docekalova L. Laplace Transforms with Maxima // The Electronic Journal of Mathematics and Technology. — 2013. — Vol. 7. — No. 2.
5. Документація wxMaxima [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>
6. Максима — система комп'ютерної алгебри: довідка [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima.html>

ДРАГАН Євгеній Вікторович
СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна

ОПЕРАЦІЙНЕ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю G22 Біомедична інженерія