**ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ЕНЕРГЕТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ**

***Кафедра інформаційних технологій,
фізико-математичних
та безпекових дисциплін***

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до практичних занять з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти
за спеціальністю G3 Електрична інженерія

**Кам'янець-Подільський
2026 рік**

УДК 517.3:631.3 (07)
С-30

Укладачі:
***СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна*,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
МАРЧУК Наталія Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Закладу вищої освіти
«Подільський державний університет»
протокол №5 від27.05.2026 р

Рецензенти:
ГУДИМА Уляна Василівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

ГАРАСИМЧУК Ігор Дмитрович
кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехніки, електромеханіки і електротехнологій, ЗВО «ПДУ».

Вища математика. Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G3 Електрична інженерія / І.В. СЕМЕНИШИНА, Н.А. МАРЧУК. Кам'янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 202. - 64с.

У методичних рекомендаціях наведено по 30 варіантів завдань для контрольних робіт, зразки їх розв'язання та основні формули по темах «Невизначений інтеграл», «Обчислення та застосування визначених інтегралів» з курсу Вищої математики.
Методичні рекомендації можуть бути використані здобувачами освіти як денної так і заочної форм навчання при підготовці та проведенні контрольних робіт з вищої математики.

Зміст

Вступ

Математика є однією з найдавніших наук, розвиток якої відбувався завдяки працям видатних учених і мислителів, серед яких Рене Декарт, Блез Паскаль, П'єр Ферма, Ісаак Ньютон, Готфрід Вільгельм Лейбніц, Леонард Ейлер, Микола Лобачевський, Андрій Колмогоров та багато інших. У сучасному світі математика відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки її методи й підходи широко застосовуються в різних сферах діяльності людини, відображаючи закономірності навколишнього світу.

Методичні рекомендації підготовлені колективом авторів кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін Закладу вищої освіти Подільський державний університет на основі багаторічного досвіду викладання дисципліни «Вища математика». Методичні рекомендації призначені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності G3 Електрична інженерія.

Основною метою рекомендацій є забезпечення якісного засвоєння практичного курсу з дисципліни «Вища математика», розвиток умінь застосовувати математичні методи у професійній діяльності та надання допомоги здобувачам вищої освіти під час самостійного розв’язування задач.

Практика викладання свідчить, що навчальний матеріал значно краще засвоюється за умови його ілюстрування достатньою кількістю прикладів. Саме тому методичні рекомендації містять 30 варіантів завдань для контрольних робіт, приклади їх розв’язання та основні теоретичні відомості з тем: «Невизначені інтеграли», «Обчислення та застосування визначених інтегралів».

Засвоєння запропонованого матеріалу дає можливість майбутнім фахівцям не лише набути необхідних базових знань і практичних навичок, а й навчитися застосовувати їх у професійній діяльності, формуючи власний підхід до розв’язання прикладних завдань.

Тема 1. Невизначений інтеграл

Основні формули та правила

1) *Невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на деякому інтервалі числової прямої називається сукупність всіх її первісних $F(x)$, тобто, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

2) Властивості невизначених інтегралів:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx; \quad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$$

$$\int df(x) = f(x) + c; \quad \int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx;$$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

3) Таблиця основних невизначених інтегралів

$$\int dx = x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$$

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$$

$$\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + c \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$$

$$\int cos\,x\,dx = sin\,x + c \qquad \int \frac{dx}{sin^2 x} = -\,ctgx + c$$

$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln tg\left|\frac{x}{2}\right| + c$

$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c$

4) Основні прийоми інтегрування:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c; \qquad \int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c;$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c.$$

5) Формула інтегрування частинами:

$$\int udv = yv - \int vdu.$$

6) Інтегрування складної функції:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

7) Інтегрування непарного степеня синуса або косинуса: треба відділити множник $\sin x$ або $\cos x$, решту замінити за формулами $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ або $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ і знайти інтеграл $\int f(\sin x)d(\sin x)$ або $\int f(\cos x)\,d(\cos x)$.

8) Інтегрування парного степеня синуса або косинуса: за формулами $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ треба понизити показник степеня, а

тоді інтегрувати.

Самостійна робота

Варіант 1

Знайти інтеграли:

1) $\int 3x^5dx$; 2) $\int (x-5)\,dx$; 3) $\int \cos(x+3)\,dx$;

4) $\int (2\sin x - 4e^x + 3)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-2}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; 8) $\int \frac{dx}{sin^2 4x}$.

Варіант 2

Знайти інтеграли:

1) $\int 4x^3dx$; 2) $\int (x+6)\,dx$; 3) $\int sin(x-6)\,dx$;

4) $\int \left(5\,cos\,x - \frac{3}{x} + 6\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+5}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-7}}$; 8) $\int \frac{dx}{cos^2 8x}$.

Варіант 3

Знайти інтеграли:

1) $\int 7x^3dx$; 2) $\int (x-4)\,dx$; 3) $\int ctg(x+3)\,dx$;

4) $\int (6\,sin\,x - 7e^x + 9)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-8}$; 6) $\int \frac{dx}{(4x-1)^2}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$; 8) $\int \frac{dx}{sin^2 7x}$.

Варіант 4

Знайти інтеграли:

1) $\int 8x^5dx$; 2) $\int (x-8)\,dx$; 3) $\int sin(2x-7)\,dx$;

4) $\int \left(5tgx - \frac{3}{x^2} + 8\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+3}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x+4}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{cos^2 5x}$.

Варіант 5

Знайти інтеграли:
1) $\int \frac{1}{2}x^6 dx$; 2) $\int (x-9)\,dx$; 3) $\int cos(3x+3)\,dx$;
4) $\int (5\,sin\,x - 6e^x + 12)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-7}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

Варіант 6

Знайти інтеграли:
1) $\int 4x^8 dx$; 2) $\int (x+9)\,dx$; 3 $\int \sin(2x-6)\,dx$;
4) $\int \left(9\cos x - \frac{3}{\sqrt{x}} + 7\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-13}$; 6) $\int \frac{dx}{(4x-9)^2}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 9x}$.

Варіант 7

Знайти інтеграли:
1) $\int 2x^5 dx$; 2) $\int (x-16)\,dx$; 3) $\int \cos(x+7)\,dx$;
4) $\int (21{,}3\sin x - 0{,}4e^x + 3)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-12}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$.

Варіант 8

Знайти інтеграли:
1) $\int 9x^3 dx$;2)$\int (x+1)\,dx$; 3) $\int \sin(x-3)\,dx$;
4$\int \left(4\cos x - \frac{9}{x} + 7\right) dx$;   5) $\int \frac{dx}{x^2+7}$;   6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+8}}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$;   8) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

Варіант 9

Знайти інтеграли:
1)$\int \frac{1}{5} x^5 dx$; 2$\int (2x-9)\,dx$;3) $\int \cos(x+5)\,dx$;
4)$\int (6\sin x - 8e^x + 1)\,dx$;   5) $\int \frac{dx}{x^2+10}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x+8}}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12}}$;   8) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$.

Варіант 10

Знайти інтеграли:
1) $\int \frac{1}{6} x^6 dx$; 2)$\int (x+7)\,dx$; 3)$\int \sin(x-3)\,dx$;
4)$\int \left(5e^x - \frac{8}{x^2} + 11\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+13}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-9}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}}$;   8) $\int \frac{dx}{\cos 8x}$.

Варіант 11

Знайти інтеграли:
1)$\int 0{,}5x^5 dx$;2)$\int (3x-5)\,dx$;3)$\int \cos\left(x+\sqrt{3}\right) dx$;
4)$\int \left(2{,}3\sin x - \frac{5}{\sqrt{x}} - 3\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-21}$;   6) $\int \frac{dx}{(3x-8)^2}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-15}}$;   8) $\int \frac{dx}{\sin 4x}$.

Варіант 12

Знайти інтеграли:

1)$\int \frac{4}{3}x^3dx$; 2)$\int (6x+1)\,dx$;3)$\int \sin(8x-6)\,dx$;

4)$\int \left(7\cos x - \frac{11}{x} + 1{,}5\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+15}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 6x}$.

Варіант 13

Знайти інтеграли:

1)$\int 0{,}3x^5dx$;2$\int (x-1{,}5)\,dx$;3)$\int \cos(x+0{,}3)\,dx$;

4)$\int (2{,}6\sin x - 0{,}4e^x + 3)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-12}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-5}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin 5x}$.

Варіант 14

Знайти інтеграли:

1) $\int 5x^3dx$; 2)$\int (2x+6)\,dx$; 3) $\int e^{5x+8}dx$;

4)$\int \left(8\cos x - \frac{5}{x} + 16\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+11}$; 6) $\int \frac{dx}{5x-7}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

Варіант 15

Знайти інтеграли:

1)$\int 8x^3dx$; 2$\int (3x-4)\,dx$;3)$\int \mathrm{tg}(x-4)\,dx$;

4)$\int (3\sin x - 12e^x + 7)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-10}$; 6) $\int \frac{dx}{(1-4x)^2}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin 7x}$.

Варіант 16

Знайти інтеграли:

1) $\int 9x^5 dx$;2) $\int (2x-8)\,dx$;3 $\int \sin(5x-7)\,dx$;

4) $\int \left(4\operatorname{tg} x - \frac{4}{x^2} + 5\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+6}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos 5x}$.

Варіант 17

Знайти інтеграли:

1) $\int 2x^6 dx$;2) $\int (3x-9)\,dx$;3) $\int e^{3x-9}\,dx$;

4) $\int \left(9\operatorname{tg} x - \frac{6}{x} + 1\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-5}$; 6) $\int \frac{dx}{8-5x}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$.

Варіант 18

Знайти інтеграли:

1) $\int 7x^8 dx$;2) $\int (4x+9)\,dx$; 3) $\int \cos(x+7)\,dx$;

4) $\int \left(7\cos x - \frac{8}{\sqrt{x}} + 3\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-11}$; 6) $\int \frac{dx}{(9-2x)^2}$;

7 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos 9x}$.

Варіант 19

Знайти інтеграли:

1) $\int 12x^5 dx$;2) $\int (3x-16)\,dx$;3) $\int \cos(1-7x)\,dx$;

4) $\int (13\sin x - 4e^{x} + 5)\,dx$;   5) $\int \frac{dx}{x^2+12}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$;   8) $\int \frac{dx}{\sin 8x}$.

Варіант 20

Знайти інтеграли:
1) $\int 6x^3 dx$;2) $\int (5x+6)\,dx$;3) $\int \cos(x+7)\,dx$;
4) $\int \left(14\cos x - \frac{1{,}9}{x} + 8\right)dx$;   5) $\int \frac{dx}{x^2-14}$; 6) $\int \frac{dx}{3x+8}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

Варіант 21

Знайти інтеграли:
1) $\int 4x^5 dx$;2) $\int (3x-9)\,dx$;3) $\int e^{5-3x}\,dx$;
4) $\int \left(6\sin x + \frac{2}{x^2} + 9\right)dx$;   5) $\int \frac{dx}{x^2-15}$; 6) $\int \frac{dx}{(8+6x)^2}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 9x}$.

Варіант 22

Знайти інтеграли:
1) $\int 5x^6 dx$;2) $\int (2x+7)\,dx$;3) $\int \mathrm{tg}(2x-9)\,dx$;
4) $\int (7e^{x} - 4\sin x + 2x)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+14}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+7x}}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$;   8) $\int \frac{dx}{\cos 7x}$.

Варіант 23

Знайти інтеграли:

1)$\int 5x^5dx$;2)$\int (8x-5)\,dx$;3$\int \cos\left(x-\sqrt{5}\right)dx$;
4)$\int \left(\frac{3}{x^2}-3\sin x-5\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-19}$; 6) $\int \frac{dx}{(3x+9)^2}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin 3x}$.

Варіант 24

Знайти інтеграли:
1)$\int 2x^3dx$;2)$\int (6x+3)\,dx$;3)$\int \sin(3x-1)\,dx$;
4)$\int \left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{12}{x}+5\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+17}$; 6) $\int \frac{dx}{6-5x}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{11-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$.

Варіант 25

Знайти інтеграли:
1) $\int 0{,}5x^4dx$; 2)$\int (6x-9)\,dx$;3)$\int e^{1-3x}dx$;
4)$\int \left(4-3\cos x+\frac{8}{x}\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-3}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+7x}}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+37}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

Варіант 26

Знайти інтеграли:
1)$\int \frac{7}{5}x^6dx$;2)$\int (5x-6)\,dx$;3)$\int \operatorname{ctg}(6x-8)\,dx$;
4)$\int \left(8x-2\sin x+\frac{5}{x}\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+18}$; 6) $\int \frac{dx}{(5x+7)^2}$;
7)$\int \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$.

Варіант 27

Знайти інтеграли:

1) $\int 7x^5 dx$;2) $\int (x-25)\,dx$;3) $\int \cos(4+9x)\,dx$;

4) $\int (12\sin x - 5e^x + 7)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-6}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin 6x}$.

Варіант 28

Знайти інтеграли:

1) $\int 14x^3 dx$;2) $\int (3x+6)\,dx$;3 $\int \sin(2+3x)\,dx$;

4) $\int \left(6\cos x - \frac{8}{x} + 1\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+8}$; 6) $\int \frac{dx}{4x-7}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 10x}$.

Варіант 29

Знайти інтеграли:

1) $\int 0{,}25x^3 dx$;2) $\int (7x-4)\,dx$;3) $\int e^{5-3x} dx$;

4) $\int (10\sin x - 5e^x + 3)\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-18}$; 6) $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+11}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$.

Варіант 30

Знайти інтеграли:

1) $\int 18x^5 dx$;2) $\int (7x-4)\,dx$;3) $\int e^{5-3x} dx$;

4) $\int \left(\operatorname{tg} x - \frac{7}{x^2} + 3\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+19}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x+2}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{18-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos 4x}$.

Зразки розв'язання

1) $\int 22x^9 dx = 22\cdot\frac{x^{10}}{10} + c = \frac{22}{10}x^{10} + c = 2{,}2x^{10} + c;$

2) $\int (13x - 15)dx = 13\cdot\frac{x^2}{2} - 15x + c = \frac{13}{2}x^2 - 15x + c;$

3) $\int \mathrm{ctg}\,(5 - 3x)\,dx = -\frac{1}{3}ln\,\sin(5 - 3x) + c;$

4) $\int \left(\frac{7}{x^2} + 2\sin x - 3\right)dx = 7\int\frac{dx}{x^2} + 2\int \sin x dx - 3\int dx =$

$= 7\left(-\frac{1}{x}\right) + 2\,(-\cos x) - 3x + c = -\frac{7}{x} - 2\cos x - 3x + c;$

5) $\int \frac{dx}{x^2+27} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{27}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{27}}arctg\frac{x}{\sqrt{27}} + c;$

6) $\int \frac{dx}{x^2-27} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{27}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{27}}ln\left|\frac{x-\sqrt{27}}{x+\sqrt{27}}\right| + c;$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-8x}} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt{12-8x}} + c = -\frac{1}{16\sqrt{12-8x}} + c;$

8) $\int \frac{dx}{18x-3} = \frac{1}{18}ln\,|18x - 3| + c;$

9) $\int \frac{dx}{(4-5x)^2} = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4-5x}\right) + c = \frac{1}{5(4-5x)} + c;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{29-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{29}\right)^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{\sqrt{29}} + c;$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-31}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 - 31}\right| + c;$

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 15x} = -\frac{1}{15}\mathrm{ctg}15x + c;$

13) $\int \frac{dx}{\cos 17x} = \frac{1}{17}ln\mathrm{tg}\left(\frac{17x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c;$

14) $\int \frac{dx}{\sin 22x} = \frac{1}{22}ln\mathrm{tg}\frac{22x}{2} + c = \frac{1}{22}ln\mathrm{tg}11x + c;$

15) $\int e^{7-11x}dx = -\frac{1}{11}e^{7-11x} + c.$

Контрольна робота №1

Варіант 1

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (4-3x)\, e^{-3x} dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{1+lnx}{x} dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int sin2x \cdot cos3xdx$; б) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8} dx$.

Варіант 2

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (2x+1)\, sin3xdx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{(arccosx)^3-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int sin5x \cdot sin7xdx$; б) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx$.

Варіант 3

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (x-1)\, e^{2x} dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \sqrt{cosx} \cdot sinx dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int cos^3 7x dx$; б) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} dx$.

Варіант 4

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (2+3x)\, cos2x dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int (lnx)^3 \cdot \frac{dx}{x}$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int sin^3 2x dx$; б) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10} dx$.

Варіант 5

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами $\int x^5 lnx dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$\int e^{-x^2} \cdot x dx$.

3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$а)\int sin^2 3x dx; \quad б)\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5} dx.$$

Варіант 6

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (5x+1) \, lnx dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x}{2+x^4} dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$а)\int cos^2 5x dx; \quad б)\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10} dx.$$

Варіант 7

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами $\int (8x-2) \, sin5x$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \sqrt{lnx} \cdot \frac{dx}{x}$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши

підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx.$

4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int sin3x{\cdot}cos3xdx; \;\; \text{б)}\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx.$$

Варіант 8

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами $\int (x-3)\, e^{-2x}dx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int sin^2x{\cdot}cos^2xdx; \;\; \text{б)}\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx.$$

Варіант 9

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int \sqrt{x}{\cdot}ln3xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x}{2x^4+5}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+x}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

а)$\int (1 + cosx)^2 dx$; б)$\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5} dx$.

Варіант 10

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (2x + 8)\, e^{-7x} dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{dx}{xlnx}$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

   а)$\int (1 - sin2x)^2 dx$; б)$\int \frac{7x - 3}{x^2 + 4x + 13} dx$.

Варіант 11

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int x^3 lnxdx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{sinx}{cos^2x} dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx$.

4. Знайти невизначені інтеграли:

$$а)\int cos^4xdx;\ \ б)\int \frac{8x-7}{x^2+10x+29}dx.$$

Варіант 12

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (3x+7)\,cos5xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x^2}{2x^3-3}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$а)\int sin^2x\cdot cosxdx;\ б)\int \frac{11x-3}{x^2+6x+13}dx.$$

Варіант 13

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (12x+2)\,sin3xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \sqrt{5x^4+3}\cdot x^3dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби:

$\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

4. Знайти невизначені інтеграли

$$\text{а)}\int cos^2x{\cdot}sinxdx;\ \ \text{б)}\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20}dx.$$

Варіант 14

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int \sqrt[3]{x}{\cdot}ln2xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int x^2e^{x^3+1}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int sin3x{\cdot}cosxdx;\ \text{б)}\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68}dx.$$

Варіант 15

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int xsin8xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши

підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$.

4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (1+3cos2x)^2 dx;\ \text{б)}\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17}dx.$$

Варіант 16

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int x\cdot cos2xdx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x}{2x^2+5}dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int cos3x\cdot cos8xdx;\ \text{б)}\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20}dx.$$

Варіант 17

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (2x-1)\, cos3xdx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int arcsin^2x\cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$.
4. Знайти невизначеніі інтеграли:

а) $\int (1 - sinx)^2 dx$; б) $\int \frac{17x+5}{x^2-12x+40} dx.$

Варіант 18

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (8x-10)\, sin7xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2} dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+3}{x^2+x-6} dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (2sinx - 1)^2 dx$; б) $\int \frac{12x-7}{x^2+16x+65} dx.$

Варіант 19

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (3x+4)e^{3x} dx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{lnx+3}{x} dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-3}{x^2+3x+2} dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3 - cosx)^2 dx$; б) $\int \frac{8x-7}{x^2-2x+17} dx.$

Варіант 20

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (4-16x)\, sin4xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \sqrt{1+2x^2}\cdot xdx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (2-3sinx)^2 dx; \quad \text{б)}\int \frac{17x-3}{x^2+8x+32}dx.$$

Варіант 21

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами $\int (1-6x)\, e^{2x}dx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx.$
4. Знайти невизначеніі інтеграли:

$$\text{а)}\int (4+sinx)^2 dx; \quad \text{б)}\int \frac{3x+4}{x^2+6x-3}dx.$$

Варіант 22

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням

частинами: $\int (4x-2)\,cos2xdx.$

2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{e^{ctg2x}}{sin^2 2x}dx.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (2+cos3x)^2dx; \quad \text{б)}\int \frac{4x-11}{x^2-8x-5}dx.$$

Варіант 23

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (5x-2)\,e^{3x}dx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (1+2cosx)^2dx; \quad \text{б)}\int \frac{12x-7}{x^2-6x-1}dx.$$

Варіант 24

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$\int \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}dx.$

3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+11}{x^2-x-6}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (3+2sinx)^2dx; \quad \text{б)}\int \frac{7x+1}{x^2+4x-7}dx.$$

Варіант 25

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (5x+6)\, cos2xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{dx}{x\left(1+ln^2x\right)}.$
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+2x}{x^2-3x+2}dx.$
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)}\int (1+cos5x)^2dx; \quad \text{б)}\int \frac{8x-9}{x^2-10x+5}dx.$$

Варіант 26

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (2x-5)\, cos4xdx.$
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx.$

3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+3x}{x^2+5x-6}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)} \int (1-sin4x)^2 dx; \quad \text{б)} \int \frac{5x-7}{x^2+12x-6}dx.$$

Варіант 27

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int e^{-2x}(4x-3)dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int (2-3cos5x)^2 sin5xdx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+6x}{x^2-2x-3}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)} \int (2-cos4x)^2 dx; \quad \text{б)} \int \frac{6x-2}{x^2+8x+4}dx.$$

Варіант 28

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (8-3x)\,cos5xdx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+5x}{x^2-5x+6}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (4+3sin5x)^2 dx$; б) $\int \frac{11x-5}{x^2-14x-9}dx$.

Варіант 29

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (4-6x)\, e^{-5x} dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int \frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+8x}{x^2-6x+8}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int sin^3 4x dx$; б) $\int \frac{9x+11}{x^2-4x-7}dx$.

Варіант 30

1. Знайти невизначений інтеграл інтегруванням частинами: $\int (7x-10)\, sin4x dx$.
2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної: $\int e^{-x^4} x^3 dx$.
3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3+7x}{x^2-2x-8}dx$.
4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int cos^3 6x dx$; б) $\int \frac{10x-6}{x^2-12x-4}dx$.

Зразки розв'язання задач

Задача 1. Знайти невизначений інтеграл використовуючи формулу інтегрування частинами: а) $\int (4-3x)\cos 9x\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int udv = yv - \int vdu.$$

Позначимо $u = 4-3x, \quad dv = \cos 9x dx$.

Тоді $du = (4-3x)' dx = -3dx; \quad v = F(\cos 9x) = \frac{1}{9}\sin 9x$.

Підставляємо у формулу ці значення:

$$\int (4-3x)\cos 9x dx = (4-3x)\cdot\frac{1}{9}\sin 9x - \int \frac{1}{9}\sin 9x(-3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}(4-3x)\sin 9x + \frac{1}{3}\int \sin 9x dx = \frac{1}{9}(4-3x)\sin 9x +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(-\cos 9x) + c = \frac{1}{9}(4-3x)\sin 9x - \frac{1}{27}\cos 9x + c.$$

б) $\int (8\mathrm{x}-2)\,\mathrm{e}^{6\mathrm{x}}\mathrm{dx}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int udv = yv - \int vdu.$$

Позначимо $u = 8x-2, \quad dv = e^{6x}dx$.

Тоді $du = (8x-2)' dx = 8dx; \quad v = F\left(e^{6x}\right) = \frac{1}{6}e^{6x}$.

Підставляємо у формулу ці значення:

$$\int (8x-2)\,e^{6x}dx = (8x-2)\cdot\frac{1}{6}e^{6x} - \int \frac{1}{6}e^{6x}\cdot 8dx =$$

$$= \frac{1}{6}(8x-2)\,e^{6x} - \frac{8}{6}\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}(8x-2)\,e^{6x} -$$

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}e^{6x} + c = \frac{1}{6}(8x-2)\,e^{6x} - \frac{2}{9}e^{6x} + c.$$

в) $\int \sqrt[5]{x} lnx dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int udv = yv - \int vdu.$$

Позначимо $u = lnx, \quad dv = \sqrt[5]{x}dx.$

Тоді $du = (lnx)' dx = \frac{1}{x}dx, \ v = F\left(\sqrt[5]{x}\right) = F\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}.$

Підставляємо у формулу ці значення:

$$\int \sqrt[5]{x} lnxdx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}lnx - \int \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}lnx -$$

$$-\frac{5}{6}\int x^{\frac{6}{5}-1}dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}lnx - \frac{5}{6}\int x^{\frac{1}{5}}dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}lnx - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} =$$

$$= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}\left(lnx - \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}\left(lnx - \frac{5}{6}\right).$$

Задача 2. Знайти невизначений інтеграл застосувавши метод заміни змінної:

$$\int \frac{x^5}{\sin(3x^6 - 2)}dx.$$

Розв'язання. Заміна $3x^6 - 2 = t.$ Тоді $dt = \left(3x^6 - 2\right)' dx =$
$= 18x^5dx,$ звідки $x^5dx = \frac{1}{18}dt.$ Тоді $\int \frac{x^5}{\sin(3x^6-2)}dx =$

$$= \int \frac{x^5dx}{\sin(3x^6 - 2)} = \int \frac{\frac{1}{18}dt}{\sin t} = \frac{1}{18}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{18}lntg\left|\frac{t}{2}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{18}lntg\left|\frac{3x^6 - 2}{2}\right| + c.$$

Задача 3. Знайти невизначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію на прості дроби: $\int \frac{x^3-2x}{x^2-7x-12}dx.$

Розв'язання. Виділимо цілу частину дробу, поділивши чисельник на знаменник. Одержимо:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 7x + 12} = x + 7 + \frac{35x - 84}{x^2 - 7x + 12}.$$

Розкладемо знаменник $x^2 - 7x + 12$ на множники.
Розв'яжемо рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 1\cdot 12 = 49 - 48 = 1;$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{7-1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Тоді $x^2 - 7x + 12 = (x-3)\,(x-4)$. Розкладемо на прості дроби дріб $\frac{35x-84}{x^2-7x+12} = \frac{35x-84}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}$.

Прирівняємо чисельники першого і останнього дробів:
$35x - 84 = A\,(x-4) + B(x-3)$. Знайдемо невідомі коефіцієнти A та B, підставивши в тотожність значення $x = 3$, $x = 4$:

$$x = 3 \Rightarrow 35\cdot 3 - 84 = A\,(3-4) + B(3-3)$$

$$21 = -A \Rightarrow A = -21.$$

$$x = 4 \Rightarrow 35\cdot 4 - 84 = A\,(4-4) + B(4-3)$$

$$56 = B \Rightarrow B = 56.$$

Тоді $\frac{35x-84}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} = \frac{-21}{x-3} + \frac{56}{x-4}$.

Тоді $\frac{x^3-2x}{x^2-7x+12} = x + 7 + \frac{56}{x-4} - \frac{21}{x-3}$.

Тоді $\int \frac{x^3-2x}{x^2-7x-12}dx = \int \left(x + 7 + \frac{56}{x-4} - \frac{21}{x-3}\right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + 7x + 56\int \frac{dx}{x-4} - 21\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 7x + 56 ln\,|x-4| - 21 ln\,|x-3| + c.$$

Задача 4. Знайти невизначені інтеграли: 1) $\int \cos^3 5x dx$.

Розв'язання. За правилом інтегрування непарного степеня косинуса $\int \cos^3 5x dx = \int \cos^2 5x \cdot \cos 5x\, dx =$

$$= \int \left(1 - sin^2 5x\right) \cos 5x\, dx.$$

$$\cos 5x = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos 5x = \frac{1}{5} (\sin 5x)' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos 5x\, dx = \frac{1}{5} (\sin 5x)' dx = \frac{1}{5} d(\sin 5x)$. Тоді

$$\int \cos^3 5x dx = \int \left(1 - sin^2 5x\right) \frac{1}{5} d(\sin 5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \int \left(1 - sin^2 5x\right) d(\sin 5x) = \frac{1}{5} \int \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= \frac{1}{5} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) + c = \frac{1}{5} \left(\sin 5t - \frac{sin^3 5t}{3}\right) + c.$$

2) $\int (2 + 3\sin 2x)^2 dx.$

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію, понизивши степінь синуса: $(2 + 3\sin 2x)^2 = 4 + 12\sin 2x +$

$$+ 9\sin^2 2x = 4 + 12\sin 2x + 9 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) =$$

$= 8{,}5 + 12\sin 2x - 4{,}5 \cos 4x$. Тоді $\int (2 + 3\sin 2x)^2 dx =$

$$= \int (8{,}5 + 12\sin 2x - 4{,}5 \cos 4x)\, dx =$$

$$= 8{,}5x + 12\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - 4{,}5 \cdot \frac{1}{4} \sin 4x =$$

$$= 8{,}5x - 6 \cos 2x - 1{,}125 \sin 4x.$$

3) $\int \frac{3x - 7}{x^2 - 12x - 5} dx.$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат в знаменнику:

$$x^2 - 12x - 5 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2) - 6^2 - 5 =$$

$$= (x-6)^2 - 36 - 5 = (x-6)^2 - 41.$$

Зробимо заміну $x - 6 = t$. Звідки $x = t + 6$, $dx = dt$.

Тоді $x^2 - 12x - 5 = (x-6)^2 - 41 = t^2 - 41$. Тоді

$$\int \frac{3x-7}{x^2-12x-5}dx = \int \frac{3(t+6)-7}{t^2-41}dt =$$

$$= \int \frac{3t+18-7}{t^2-41}dt = \int \frac{3t+11}{t^2-41}dt = \int \frac{3t}{t^2-41}dt +$$

$$+ 11\int \frac{dt}{t^2-41} = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2-41} + 11\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{41}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2-41)}{t^2-41} + 11\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{41}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|t^2-41\right| + 11\cdot\frac{1}{2\sqrt{41}}ln\left|\frac{t-\sqrt{41}}{t+\sqrt{41}}\right| + c =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|x^2-12x-5\right| + \frac{11}{2\sqrt{41}}ln\left|\frac{x-6-\sqrt{41}}{x-6+\sqrt{41}}\right| + c.$$

Тема 2. Визначений інтеграл. Обчислення площ однорідних плоских фігур

Основні формули

1) Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

називається приріст її первісної $F(x)$ на ньому, тобто, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

2) Геометричний зміст визначеного інтеграла: визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою

3) $y = f(x)$, віссю Ох та прямими $x=a,\ x=b$.

4) Властивості визначених інтегралів: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt; \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ де } c \in (a;b);$$

$$\int_a^b \left(c_1 f(x) \pm c_2 g(x)\right) dx = c_1 \int_a^b f(x) \pm c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

5) Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла: $\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$.

6) Заміна змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\text{де } \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

7) Обчислення площ криволінійних трапецій:

а) в прямокутних координатах:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \text{ якщо } f(x) > 0;$$

$$s = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \text{ якщо } f(x) < 0;$$

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy, \text{ якщо } \varphi(y) > 0;$$

$$s = -\int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy, \text{ якщо } \varphi(y) < 0;$$

б) в параметричній формі: $s = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt$,

якщо фігура обмежена лініями

$$x = x(t), y = y(t), \; t_1 < t < t_2;$$

в) в полярних координатах: $s = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$,

якщо фігура обмежена лініями

$$\rho = \rho(\varphi), \varphi = \varphi_1, \; \varphi = \varphi_2.$$

8) Обчислення площ плоских фігур в прямокутних координатах:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \left(y_{\text{верхнє}} - y_{\text{нижнє}}\right) dx;$$

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \left(x_{\text{праве}} - x_{\text{ліве}}\right) dx.$$

Зразки розв’язання задач

№1. $\int_{-2,5}^{-1,5}\frac{dx}{e^{2x+4}+1}=\left[\begin{array}{l} e^{2x+4}=t \\ 2x+4=ln\,t \\ 2dx=\frac{dt}{t};dx=\frac{dt}{2t} \\ x_н=-2,5;x_в=-1,5 \\ t_н=\frac{1}{e};t_в=e \end{array}\right]=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\frac{dt}{2t}}{t+1}=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dt}{t(t+1)}==$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{(t+1)-t}{t(t+1)}dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{t+1}{t(t+1)}-\frac{t}{t(t+1)}\right)dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt==\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dt}{t}-$
$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dt}{t+1}=(ln\,|t|-ln\,|t+1|)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}=ln\,e-ln\,(e+1)-$

$$-\left(ln\frac{1}{e}-ln\left(\frac{1}{e}+1\right)\right)=1-ln\,(e+1)+1+ln\frac{e+1}{e}=$$

$=2-ln\,(e+1)+ln\,(e+1)-ln\,e=2-1=1.$

№2. $\int_{-3}^{9}\frac{dx}{2+\sqrt{x+7}}=\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+7}=t \\ x+7=t^2 \\ x=t^2-7 \\ dx=(t^2-7)'dt=2tdt \\ x_н=-3\Rightarrow t_н=\sqrt{-3+7}=2 \\ x_в=9\Rightarrow t_в=\sqrt{9+7}=4 \end{array}\right]=\int_{2}^{4}\frac{2tdt}{2+t}==$

$2\int_{2}^{4}\frac{t+2-2}{t+2}dt=2\int_{2}^{4}\left(\frac{t+2}{t+2}-\frac{2}{t+2}\right)dt=2\int_{2}^{4}\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt==2\int_{2}^{4}dt-$
$4\int_{2}^{4}\frac{dt}{t+2}=(2t-4\,ln\,|t+2|)\Big|_{2}^{4}=$

$$=2\cdot4-4\,ln\,6-(2\cdot2-4\,ln\,4)=8-4\,ln\,6-4+4\,ln\,4=$$

$$=4+4\,ln\,4-4\,ln\,6=4+4\,ln\frac{4}{6}=4+4\,ln\frac{2}{3}.$$

№3. $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x^2+10x+26}=\left[\begin{array}{l} x^2+10x+26=(x^2+10x+25)+1= \\ =(x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2)+1=(x+5)^2+1 \\ x+5=t\Rightarrow x^2+10x+26=t^2+1;\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows \\ x=t-5\Rightarrow dx=(t-5)'dt=dt \\ x_н=-1\Rightarrow t_н=-1+5=4; \\ x_в=3\Rightarrow t_в=3+5=8 \\ \rightleftarrows\rightleftarrows \end{array}\right]=$

$$=\int_4^8\frac{dt}{t^2+1}=arctgt\Big|_4^8=arctg8-arctg4.$$

№4. $\int_1^7\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{4x-3}}=\left[\begin{array}{l} \sqrt{4x-3}=t\Rightarrow 4x-3=t^2\Rightarrow 4x=t^2+3\Rightarrow \\ \Rightarrow x=\frac{t^2+3}{4}\Rightarrow dx=\left(\frac{t^2+3}{4}\right)'dt=\frac{t}{2}dt \\ x_н=1\Rightarrow t_н=\sqrt{4\cdot 1-3}=1; \\ x_в=7\Rightarrow t_в=\sqrt{4\cdot 7-3}=5 \\ 2x+1=2\cdot\frac{t^2+3}{4}+1=\frac{2\left(t^2+3\right)+4}{4}= \\ =\frac{2t^2+10}{4}=\frac{t^2+5}{2} \end{array}\right]==$

$$\int_1^5\frac{\frac{t^2+5}{2}}{t}\cdot\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}\int_1^5\left(t^2+5\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_1^5==$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{5^3}{3}+5\cdot 5-\frac{1}{3}-5\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}+25-\frac{1}{3}-5\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{124}{3}+20\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{124+60}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{184}{3}=\frac{46}{3}.$$

№5. $\int_4^6 \frac{(2x-7)dx}{x^2-6x+25} = \left[\begin{array}{l} x^2-6x+25=\left(x^2-6x+9\right)+16= \\ =\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)+16=(x-3)^2+16 \\ x-3=t\Rightarrow x=t+3\Rightarrow dx=(t+3)'dt=dt \\ 2x-7=2(t+3)-7=2t+6-7=2t-1 \\ x_н=4\Rightarrow t_н=4-3=1; \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows \\ x_в=6\Rightarrow t_в=6-3=3 \\ x^2-6x+25=t^2+16=t^2+4^2 \end{array}\right] =$

$$=\int_1^3 \frac{2t-1}{t^2+4^2}dt=\int_1^3 \frac{2tdt}{t^2+16}-\int_1^3 \frac{dt}{t^2+4^2}=\left(ln\left(t^2+16\right)-\frac{1}{4}arctg\frac{t}{4}\right)\Big|_1^3=$$

$$=ln\left(3^2+16\right)-\frac{1}{4}arctg\frac{3}{4}-ln\left(1^2+16\right)+\frac{1}{4}arctg\frac{1}{4}=$$

$$=ln25-\frac{1}{4}arctg\frac{3}{4}-ln17+\frac{1}{4}arctg\frac{1}{4}.$$

№6. $\int_{-2}^2 \frac{\sqrt{x+2}dx}{\sqrt{x+2}-3} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=t\Rightarrow x+2=t^2\Rightarrow x=t^2-2\Rightarrow \\ \Rightarrow dx=\left(t^2-2\right)'dt=2tdt \\ x_н=-2\Rightarrow t_н=\sqrt{-2+2}=0; \\ x_в=2\Rightarrow t_в=\sqrt{2+2}=2 \end{array}\right] =$

$$=\int_0^2 \frac{t\cdot 2tdt}{t-3}=2\int_0^2 \frac{t^2}{t-3}dt=2\int_0^2 \frac{(t^2-9)+9}{t-3}dt=2\int_0^2 \frac{t^2-9}{t-3}dt+2\int_0^2 \frac{9dt}{t-3}==$$

$$2\int_0^2 \frac{(t-3)(t+3)}{t-3}dt+18\int_0^2 \frac{dt}{t-3}=2\int_0^2 (t+3)\,dt+18\int_0^2 \frac{dt}{t-3}=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}+3t\right)\Bigg|_0^2+18\,ln\,|t-3|\,\big|_0^2=(t^2+6t+18\,ln\,|t-3|\,)\Big|_0^2=$$

$$=2^2+6\cdot 2+18\,ln\,|2-3|-\left(0^2+6\cdot 0+18\,ln\,|0-3|\right)=$$

$$=4+12+18\,ln1-18\,ln3=16-18\,ln3.$$

№7.

$$\int_{-1}^{4}\frac{\sqrt{x+5}dx}{x+9}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=t\Rightarrow x+5=t^2\Rightarrow x=t^2-5\Rightarrow\\ \Rightarrow dx=\left(t^2-5\right)'dt=2tdt\\ x_н=-1\Rightarrow t_н=\sqrt{-1+5}=2x_в=4\Rightarrow t_в=\sqrt{4+5}=3\end{array}\right]=$$

$$=\int_2^3\frac{t\cdot 2tdt}{t^2-5+9}=2\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2+4}=2\int_2^3\frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt=2\int_2^3\frac{t^2+4}{t^2+4}dt-\ -2\int_2^3\frac{4dt}{t^2+4}=$$

$$2\int_2^3 dt-8\int_2^3\frac{dt}{t^2+2^2}=\left(2t-8\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_2^3==\left(2t-4arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_2^3=2\cdot$$

$$3-4arctg\frac{3}{2}-\left(2\cdot 2-4arctg\frac{2}{2}\right)=$$

$$=6-4arctg1{,}5-4+4arctg1=2-4arctg1{,}5+4\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=2-arctg1{,}5+\pi.$$

№8. $\int_1^2 ln(6x-5)\,dx=$

$$\left[\begin{array}{l}ln(6x-5)=u\Rightarrow du=(ln(6x-5))'dx=\frac{6dx}{6x-5}\\ dx=dv\Rightarrow v=x;\int_a^b udv=u\cdot v|_a^b-\int_a^b vdu\end{array}\right]=$$

$$=x\cdot ln(6x-5)|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{6dx}{6x-5}$$

$$=x\,ln(6x-5)|_1^2-\int_1^2\frac{(6x-5)+5}{6x-5}dx=$$

$$=x\,ln(6x-5)|_1^2-\int_1^2\left(1+\frac{5}{6x-5}\right)dx=$$

$$\left(x\,ln(6x-5)-x-\frac{5}{6}ln(6x-5)\right)\Big|_1^2==2\,ln(6\cdot 2-5)-2-$$

$$\frac{5}{6}ln(6\cdot 2-5)-\left(2\,ln(6\cdot 1-5)-1-\frac{5}{6}ln(6\cdot 1-5)\right)=$$

$$=2\,ln7-2-\frac{5}{6}ln7-2\,ln1-1-\frac{5}{6}ln1=\frac{2\cdot 6-5}{6}ln7-3$$

$$=\frac{7}{6}ln7-3.$$

№9.

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+3x-28}$$

$$=\left[\begin{array}{l} x^2+3x-28=0\Rightarrow x_1=-7, x_2=4\Rightarrow x^2+3x-28= \\ =(x+7)(x-4) \\ \dfrac{1}{(x+7)(x-4)}=\dfrac{A}{x+7}+\dfrac{B}{x-4}=\dfrac{A(x-4)+B(x+7)}{(x+7)(x-4)} \\ 1=A(x-4)+B(x+7) \\ x=4\Rightarrow 1=A(4-4)+B(4+7)\Rightarrow 1=11B\Rightarrow B=\dfrac{1}{11} \\ x=-7\Rightarrow 1=A(-7-4)+B(-7+7)\Rightarrow 1=-11A\Rightarrow \\ \Rightarrow A=-\dfrac{1}{11} \end{array}\right]=$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{A}{x+7}+\frac{B}{x-4}\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{11}}{x+7}+\frac{\frac{1}{11}}{x-4}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{11}\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x+7}+\frac{1}{11}\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{11}(ln|x-4|-ln|x+7|)\Big|_{-2}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{11}ln\left|\frac{x-4}{x+7}\right|\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1}{11}ln\left|\frac{-1-4}{-1+7}\right|-\frac{1}{11}ln\left|\frac{-2-4}{-2+7}\right|$$

$$=\frac{1}{11}ln\frac{5}{6}-\frac{1}{11}ln\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{1}{11}ln\frac{5}{6}+\frac{1}{11}ln\frac{5}{6}=\frac{2}{11}ln\frac{5}{6}.$$

№10. $\int_{-3}^{9}\frac{dx}{2+\sqrt{x+7}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+7}=t\\ x+7=t^2\\ x=t^2-7\\ dx=(t^2-7)'dt=2tdt\\ x_н=-3\Rightarrow t_н=\sqrt{-3+7}=2\\ x_в=9\Rightarrow t_в=\sqrt{9+7}=4\end{array}\right]==\int_2^4\frac{2tdt}{2+t}=$

$2\int_2^4\frac{t+2-2}{t+2}dt=2\int_2^4\left(\frac{t+2}{t+2}-\frac{2}{t+2}\right)dt=$

$=2\int_2^4\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=2\int_2^4 dt-4\int_2^4\frac{dt}{t+2}=(2t-4\,ln\,|t+2|)|_2^4==2\cdot 4-$

$4\,ln\,6-(2\cdot 2-4\,ln\,4)=8-4\,ln\,6-4+4\,ln\,4=$

$$=4+4\,ln\,4-4\,ln\,6=4+4\,ln\frac{4}{6}=4+4\,ln\frac{2}{3}.$$

№11. $\int_1^7\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{4x-3}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x-3}=t\Rightarrow 4x-3=t^2\Rightarrow 4x=t^2+3\Rightarrow\\ \Rightarrow x=\frac{t^2+3}{4}\Rightarrow dx=\left(\frac{t^2+3}{4}\right)'dt=\frac{t}{2}dt\\ x_н=1\Rightarrow t_н=\sqrt{4\cdot 1-3}=1;\\ x_в=7\Rightarrow t_в=\sqrt{4\cdot 7-3}=5\\ 2x+1=2\cdot\frac{t^2+3}{4}+1=\frac{2\left(t^2+3\right)+4}{4}=\\ =\frac{2t^2+10}{4}=\frac{t^2+5}{2}\end{array}\right]=$

$=\int_1^5\frac{\frac{t^2+5}{2}}{t}\cdot\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}\int_1^5\left(t^2+5\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_1^5=$

$\frac{1}{4}\left(\frac{5^3}{3}+5\cdot 5-\frac{1}{3}-5\right)==\frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}+25-\frac{1}{3}-5\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{124}{3}+20\right)=$

$\frac{1}{4}\left(\frac{124+60}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{184}{3}=\frac{46}{3}.$

№12. $\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{x+2}dx}{\sqrt{x+2}-3} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+2} = t \Rightarrow x+2 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \left(t^2-2\right)' dt = 2tdt \\ x_н = -2 \Rightarrow t_н = \sqrt{-2+2} = 0; \\ x_в = 2 \Rightarrow t_в = \sqrt{2+2} = 2 \end{bmatrix} =$

$$= \int_0^2 \frac{t \cdot 2tdt}{t-3} = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t-3}dt = 2\int_0^2 \frac{(t^2-9)+9}{t-3}dt$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2-9}{t-3}dt + 2\int_0^2 \frac{9dt}{t-3} =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{(t-3)(t+3)}{t-3}dt + 18\int_0^2 \frac{dt}{t-3} = 2\int_0^2 (t+3)\,dt + 18\int_0^2 \frac{dt}{t-3} =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + 3t\right)\Big|_0^2 + 18\,ln\,|t-3|\,|_0^2 = (t^2 + 6t + 18\,ln\,|t-3|\,)\Big|_0^2 =$$

$$= 2^2 + 6 \cdot 2 + 18\,ln\,|2-3| - \left(0^2 + 6 \cdot 0 + 18\,ln\,|0-3|\right) =$$

$$= 4 + 12 + 18\,ln 1 - 18\,ln 3 = 16 - 18\,ln 3.$$

№13.

$\int_{-1}^{4} \frac{\sqrt{x+5}dx}{x+9} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+5} = t \Rightarrow x+5 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \left(t^2-5\right)' dt = 2tdt \\ x_н = -1 \Rightarrow t_н = \sqrt{-1+5} = 2; \leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows \\ \leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows\leftrightarrows\; x_в = 4 \Rightarrow t_в = \sqrt{4+5} = 3 \end{bmatrix} =$

$$= \int_2^3 \frac{t \cdot 2tdt}{t^2-5+9} = 2\int_2^3 \frac{t^2dt}{t^2+4} = 2\int_2^3 \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt = 2\int_2^3 \frac{t^2+4}{t^2+4}dt - 2\int_2^3 \frac{4dt}{t^2+4} =$$

$$= 2\int_2^3 dt - 8\int_2^3 \frac{dt}{t^2+2^2} = \left(2t - 8 \cdot \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_2^3 = \left(2t - 4arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 2 \cdot 3 - 4arctg\frac{3}{2} - \left(2 \cdot 2 - 4arctg\frac{2}{2}\right) =$$

$$= 6 - 4arctg1{,}5 - 4 + 4arctg1 = 2 - 4arctg1{,}5 + 4 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 - arctg1{,}5 + \pi.$$

№14. $\int_{-3}^{5}\frac{1+\sqrt{x+4}}{(x+4)^2}dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4}=t x_н=-3\Rightarrow t_н=\sqrt{-3+4}=1\\ x+4=t^2 x_в=5\Rightarrow t_в=\sqrt{5+4}=3\\ dx=2tdt\end{array}\right]=$

$$=\int_1^3\frac{1+t}{\left(t^2\right)^2}\cdot 2tdt=2\int_1^3\frac{1+t}{t^4}\cdot tdt=2\int_1^3\frac{t+1}{t^3}dt$$

$$=2\int_1^3\left(\frac{1}{t^2}+t^{-3}\right)dt=$$

$$=2\left(-\frac{1}{t}+\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right)\Bigg|_1^3=2\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_1^3$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 3^2}\right)-2\left(-1-\frac{1}{2}\right)=$$

$=-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+2+1=3-\frac{7}{9}=2\frac{2}{9}.$

№15. $\int_{-3}^{5}\frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{(x+4)^3}}=$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4}=t x_н=-3\Rightarrow t_н=\sqrt{-3+4}=1\\ x+4=t^2 x_в=5\Rightarrow t_в=\sqrt{5+4}=3\\ dx=2tdt\end{array}\right]=$

$=\int_1^3\frac{2tdt}{t+t^3}=2\int_1^3\frac{tdt}{t\left(t^2+1\right)}=2\int_1^3\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt\big|_1^3=2arctg3-2arctg1=$

$$=2arctg3-2\cdot\frac{\pi}{4}=2arctg3-\frac{\pi}{2}.$$

№16. $\int_0^2\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=t x_н=0\Rightarrow t_н=\sqrt[3]{0}=0\\ x=t^3 x_в=2\Rightarrow t_в=\sqrt[3]{2}\\ dx=3t^2dt\end{array}\right]=$

$\int_0^{\sqrt[3]{2}}\frac{3t^2dt}{1+t}=3\int_0^{\sqrt[3]{2}}\frac{t^2-1+1}{t+1}dt==$

$3\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt=$

$3\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}-t+ln\,|t+1|\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{2}}$
$=$

$$= 3\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2}-\sqrt[3]{2}+ln\left|\sqrt[3]{2}+1\right|\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{2}-\sqrt[3]{2}+ln\left|\sqrt[3]{2}+1\right|\right) = 3\,ln\left|\sqrt[3]{2}+1\right|.$$

№17.

$$\int_{-2}^{3}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+7}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+7}=t \\ 3x+7=t^2 \\ x=\dfrac{t^2-7}{3} \\ dx=\left(\dfrac{t^2-7}{3}\right)' dt=\dfrac{2}{3}tdt \\ x_н=-2 \Rightarrow t_н=\sqrt{3\cdot(-2)+7}=1 \\ x_в=3 \Rightarrow t_в=\sqrt{3\cdot3+7}=4 \end{array}\right] =$$

$=\int_1^4\frac{\frac{2}{3}tdt}{2\cdot\frac{t^2-7}{3}+t} = \frac{2}{3}\int_1^4\frac{t\cdot3}{2t^2-14+3t}dt = 2\int_1^4\frac{tdt}{2t^2+3t-14} =$

$$= \left[\begin{array}{l} 2t^2+3t-14 = 2\left(t^2+\dfrac{3}{2}t-7\right) = 2\left(t^2+2\cdot\dfrac{3}{4}t+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-7\right) = \\ = 2\left(\left(t+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}-7\right) = 2\left(\left(t+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{121}{16}\right); \\ заміна\ t+\dfrac{3}{4}=u \Rightarrow t=u-\dfrac{3}{4} \Rightarrow dt=du \end{array}\right]$$

$$=$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{u-\frac{3}{4}}{u^2-\frac{121}{16}}du = \int\frac{udu}{u^2-\frac{121}{16}} - \frac{3}{4}\int\frac{du}{u^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|u^2-\frac{121}{16}\right| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{11}{4}}ln\left|\frac{u-\frac{11}{4}}{u+\frac{11}{4}}\right| =$$

$$= \left[\frac{1}{2}ln\left|t^2+\frac{3}{2}t-7\right| - \frac{3}{22}ln\left|\frac{t+\frac{3}{4}-\frac{11}{4}}{t+\frac{3}{4}+\frac{11}{4}}\right|\right]\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|4^2+\frac{3}{2}\cdot 4-7\right| - \frac{1}{2}ln\left|1+\frac{3}{2}-7\right| - \frac{3}{22}ln\left|\frac{t-2}{t+\frac{7}{2}}\right|\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}ln(16+6-7) - \frac{1}{2}ln\,4{,}5 - \frac{3}{22}ln\frac{4-2}{4+3{,}5} + \frac{3}{22}ln\left|\frac{1-2}{1+3{,}5}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}ln\,15 - \frac{1}{2}ln\,4{,}5 - \frac{3}{22}ln\frac{2}{7{,}5} + \frac{3}{22}ln\frac{1}{4{,}5} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\frac{15}{4{,}5} - \frac{3}{22}ln\frac{4{,}5\cdot 2}{7{,}5} = \frac{1}{2}ln\frac{10}{3} - \frac{3}{22}ln\frac{6}{5}.$$

Контрольна робота №2

Варіант 1

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

   а) $y = -x^2 + 5$ та $y = -x - 1$;

   б) $y = 2x^2, y = -2x + 4, y = 0$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1, y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6;$
г) $\rho = 2\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 2

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 2x + 7$ та $y = -x + 3;$
   б) $y = x^2, y = -x + 2, y = 0;$
   в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2, y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 7;$
   г) $\rho = 8(1 + \cos\phi), \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}.$

Варіант 3

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 2x + 5$ та $y = -x + 1;$
   б) $y = 3x^2, y = -x + 4, y = 0;$
   в) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2, y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4;$
   г) $\rho = 4\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{3}.$

Варіант 4

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 2x + 4$ та $y = -x$;
   б) $y = \frac{1}{4}x^2, y = -x + 3, y = 0;$
   в) $y = 2x^2 + 6x - 3, y = -x^2 + x - 5;$
   г) $\rho = 2\sin\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 5

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 2x + 6$ та $y = -x + 2;$
   б) $y = \frac{1}{2}x^2, y = -3x + 8, y = 0;$
   в) $y = 3x^2 - 5x - 1, y = -x^2 + 2x + 1;$

г) $\rho = 10\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right), \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 6

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = -x^2 - 2x + 8$ та $y = -x + 2$;

б) $y = \frac{1}{3}x^2, y = -3x + 12, y = 0$;

в) $y = x^2 - 3x - 1, y = -x^2 - 2x + 5$;

г) $\rho = \sqrt{\cos 2\phi}, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 7

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 + 2x - 7$ та $y = x - 1$;

б) $y = 4x^2, y = -2x + 2, y = 0$;

в) $y = 2x^2 - 6x + 1, y = -x^2 + x - 1$;

г) $\rho = 1 - \cos 2\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 8

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 + 2x - 6$ та $y = x$;

б) $y = \frac{1}{4}x^2, y = -\frac{1}{2}x + 2, y = 0$;

в) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x - 4, y = -\frac{2}{3}x^2 - x - 2$;

г) $\rho = 2 + \cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 9

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 + 2x - 5$ та $y = x + 1$;

б) $y = 4x^2, y = -2x + 6, y = 0$;

в) $y = x^2 - 5x - 3, y = -3x^2 + 2x - 1$;

г) $\rho = 1 + \sin 2\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 10

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2$ - 6 та $y = x$;

б) $y = x^2, y = -3x + 4, y = 0$;

в) $y = x^2 - 2x - 5, y = -x^2 - x + 1$;

г) $\rho = 2 - cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}$.

Варіант 11

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2$ - 5 та $y = x + 1$;

б) $y = 2x^2, y = -3x + 14, y = 0$;

в) $y = x^2 - 2x - 5, y = -x^2 - x + 1$;

г) $\rho = 3\,cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 12

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2$ - $2x$ - 7 та $y = x - 3$;

б) $\mathrm{y} = \frac{1}{3}\mathrm{x}^2, \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 6, \mathrm{y} = 0$;

в) $\mathrm{y} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2, y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$;

г) $\rho = 4\left(1 + cos\phi\right), \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 13

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = -x^2 + 5$ та $y = -x - 1$;

б) $y = 3x^2, y = -2x + 5, y = 0$;

в) $y = 2x^2 - 6x + 3, y = -2x^2 + x + 5$;

г) $\rho = 3\,cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{3}$.

Варіант 14

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = -x^2 - 4x$ - 7 та $y = x - 7$;

б) $y = \frac{1}{3}x^2, y = -2x + 9, y = 0$;

в) $\mathrm{y} = x^2 - 3x - 4, y = -x^2 - x = 8$;

г) $\rho = 4\sin\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}$.

Варіант 15

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 6x - 5$ та $y = -x + 1$;
   б) $y = x^2, y = -x + 6, y = 0$;
   в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1, y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$;
   г) $\rho = 4\cos\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right), \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 16

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 - 4x - 8$ та $y = x - 8$;
   б) $y = 2x^2, y = -x + 10, y = 0$;
   в) $y = 2x^2 + 4x - 7, y = -x^2 - x + 1$;
   г) $\rho = 1 + \cos 2\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 17

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 6x - 5$ та $y = -x + 1$;
   б) $y = 3x^2, y = -3x + 6, y = 0$;
   в) $y = 2x^2 + 3x + 1, y = -x^2 - 2x + 9$;
   г) $\rho = \sqrt{\cos 3\phi}, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 18

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 4x + 7$ та $y = -x + 7$;
   б) $y = x^2, y = -2x + 3, y = 0$;
   в) $y = 2x^2 - 6x - 2, y = -x^2 + x - 4$;
   г) $\rho = 3 + \cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Варіант 19

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 - 7x + 3$ та $y = x - 4$

б) $y = x^2, y = -4x + 5, y = 0;$

в) $y = x^2 - 2x - 4, y = -x^2 - x + 2;$

г) $\rho = 2\cos 3\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 20

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = -x^2 + 4x + 6$ та $y = -x + 6;$

б) $y = 3x^2, y = -5x + 8, y = 0;$

в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2, y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3;$

г) $\rho = 2 + \sin\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 21

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями

а) $y = x^2 + 4x - 3$ та $y = x + 1;$

б) $y = 2x^2, y = -3x + 5, y = 0;$

в) $y = x^2 - 5x + 3, y = -x^2 - 2x + 2;$

г) $\rho = 2(1 + \cos\phi), \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{3}.$

Варіант 22

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = -x^2 + 4x + 8$ та $y = -x + 8;$

б) $y = x^2, y = -3x + 10, y = 0;$

в) $y = x^2 + 4x + 7, y = -x^2 + x + 9;$

г) $\rho = 3 + 2\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 23

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями

а) $y = x^2 + 6x + 7$ та $y = -x + 1;$

б) $y = x^2, y = -5x + 14, y = 0;$

в) $y = x^2 + 7x + 4, y = -x^2 + 2x + 2;$
г) $\rho = 1 + 2\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}.$

Варіант 24

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 - 4x + 1$ та $y = x + 1;$
   б) $y = 2x^2, y = -5x + 7, y = 0;$
   в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1, y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 5;$
   г) $\rho = 1 - \cos 2\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{3}.$

Варіант 25

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями
   а) $y = -x^2 + 9$ та $y = -x + 3;$
   б) $y = x^2, y = -5x + 6, y = 0;$
   в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5, y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1;$
   г) $\rho = 3 + \sin\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}.$

Варіант 26

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
   а) $y = -x^2 + 6x - 5$ та $y = x - 5;$
   б) $y = x^2, y = -6x + 7, y = 0;$
   в) $y = x^2 + 3x - 5, y = -2x^2 + 5x - 4;$
   г) $\rho = 3\sin 2\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}.$

Варіант 27

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями
   а) $y = -x^2 - 4x + 3$ та $y = -x - 1;$
   б) $y = 4x^2, y = -x + 5, y = 0;$
   в) $y = 2x^2 + 5x - 2, y = -2x^2 + 6x + 1;$
   г) $\rho = 3 + 4\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}.$

Варіант 28

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = - x^2 + 6x - 1$ та $y = - x + 5$;

б) $y = x^2, y = -2x + 15, y = 0$;

в) $y = 2x^2 + 3x - 5, y = -x^2 + 4x + 5$;

г) $\rho = 4 + 5\cos\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{3}$.

Варіант 29

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями

а) $y = x^2 - 4x - 6$ та $y = x - 6$;

б) $y = 2x^2, y = -5x + 7, y = 0$;

в) $y = 2x^2 + 2x - 3, y = -2x^2 - x + 4$;

г) $\rho = 2 + \cos 3\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}$.

Варіант 30

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = - x^2 + 8x - 9$ та $y = - x + 2$;

б) $y = 4x^2, y = -3x + 7, y = 0$;

в) $y = x^2 + 3x - 2, y = -2x^2 + x + 3$;

г) $\rho = 1 + 3\sin\phi, \phi = 0, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Зразки розв'язання задач

Задача 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 + 4,\ y = 0,\ x = 0, x = 2.$$

Розв'язання. Дана фігура є криволінійною трапецією, обмеженою зверху параболою, знизу віссю ОХ, зліва і справа прямими

$$x = 0, x = 2.$$

Для обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x), x = x_1, x = x_2, y = 0$ користуються формулою

$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x) x dx$. В даній задачі $f(x) = x^2 + 4, x_1 = 0, x_2 = 2$. Підставляючи ці дані у формулу, одержимо:

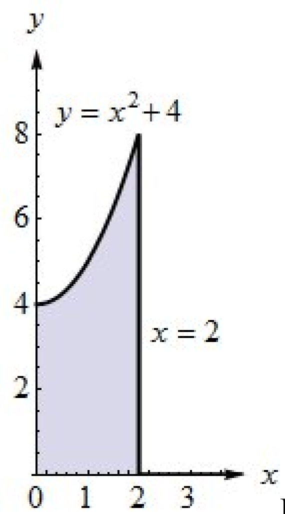

Рис.1

$$s = \int_0^2 (x^2 + 4) dx = \int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - 0 =$$
$$= \frac{8}{3} + 8 == 8\left(\frac{1}{3} + 1\right) = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} (кв.од.)$$

Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями
$$y = 9 - x^2, y = 0.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо точки перетину даних ліній із системи їх рівнянь:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3.$$

Підставляючи у формулу значення $x_1 = -3, x_2 = 3$, $f(x) = 9 - x^2$, одержимо:

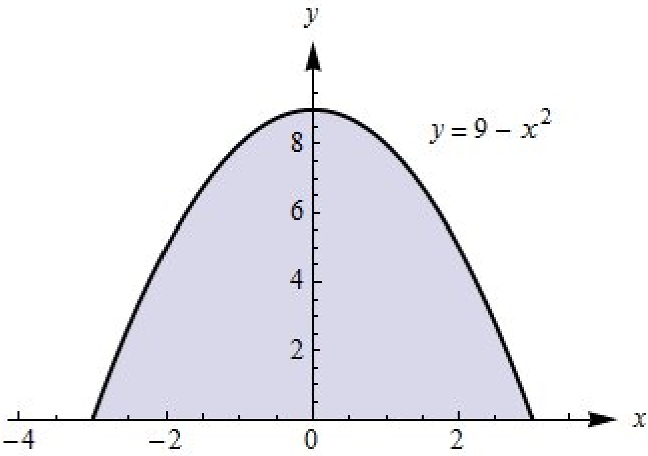

Рис.2

$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx$. При інтегруванні парної функції $f(x) = 9 - x^2$ на симетричному відрізку [-3;3] підінтегральна функція подвоюється, а відрізок інтегрування зменшується вдвічі і дорівнює [0;3]. Тому

$s = 2\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx = 18\int_0^3 dx - 2\int_0^3 x^2 dx =$

$\left(18x - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 == 18 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{3^3}{3} - 0 = 54 - 18 = 36$ (*кв.од.*)

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями
$y = x^2 + 6x - 3, y = 2x - 3.$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній із системи їх рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 6x - 3 = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = -4, x_2 = 0} \Rightarrow y_2 = 2 \cdot 0 - 3 = -3, y_1 = 2 \cdot (-4) - 3 = -11.$$

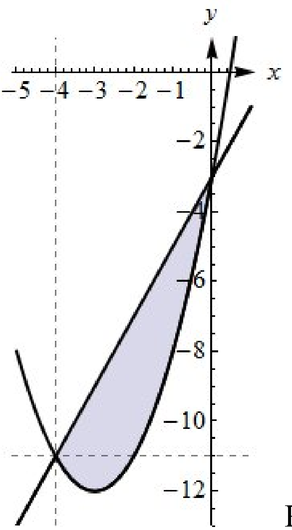

Рис.3

Отже, пряма і парабола перетинаються в точках (0;-3) та (-4;-11). Оскільки вітки параболи направлені вгору, то вона обмежує дану фігуру знизу, а пряма зверху. Тому

$$y_{верх} = 2x - 3,\ y_{нижнє} = x^2 + 6x - 3.$$

Підставляючи у формулу $s = \int_{x_1}^{x_2} \left(y_{\text{верх}} - \text{y}_{\text{ниж}}\right) dx$ знайдені значення, одержимо: $s = \int_{-4}^{0} \left(2x - 3 - \left(x^2 + 6x - 3\right)\right) dx.$

Для зручності поміняємо місцями межі інтеграла, поставивши перед інтегралом знак мінус. Тоді

$$s = -\int_0^{-4} \left(2x - 3 - \left(x^2 + 6x - 3\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{-4} \left(x^2 + 6x - 3 - (2x - 3)\right) dx =$$

$$\int_0^{-4} \left(x^2 + 6x - 3 - 2x + 3\right) dx = \int_0^{4} \left(x^2 + 4x\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{-4} =$$

$$= \frac{(-4)^3}{3} + 2(-4)^2 = 32 - \frac{64}{3} = 32\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}\,(кв.од.)$$

Задача 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y =- x^2 - 4x + 5, y =- 3x - 1.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній із системи їх рівнянь:

$$\begin{cases} y =- x^2 - 4x + 5 \\ y =- 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow - x^2 - 4x + 5 =- 3x - 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 5$$
$$= 3x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \Rightarrow D = b^2 - 4ac$$
$$= 1^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = 5;$$
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-5}{2} =- 3; x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2;$$
$$y_1 =- 3 \cdot (-3) - 1 = 8; y_2 =- 3 \cdot 2 - 1 =- 7.$$

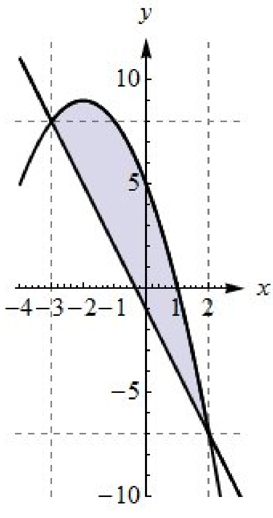

Рис.4

Отже, парабола і пряма перетинаються в точках (-3;8) та (2;-7). Вітки параболи направлені вниз, тому фігура зверху обмежена параболою, а знизу – прямою.

Тому $y_{верх} =- x^2 - 4x + 5, y_{нижнє} =- 3x - 1, x_1 =- 3, x_2 = 2.$

Підставивши знайдені значення у формулу,
одержимо:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} (y_в - y_н) dx = \int_{-3}^{2} \left(- x^2 - 4x + 5 - (-3x - 1) \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{2} \left(- x^2 - 4x + 5 + 3x + 1 \right) dx = \int_{-3}^{2} \left(6 - x^2 - x \right) dx ==$$

$$6 \int_{-3}^{2} dx - \int_{-3}^{2} x^2 dx - \int_{-3}^{2} x dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^{2} =$$

$$= 6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) == 12 - \frac{8}{3} - 2 -$$

$$\left(- 18 + 9 - \frac{9}{2} \right) = 10 - \frac{8}{3} + 18 - 9 + \frac{9}{2} =$$

$$= 19 - 2 - \frac{2}{3} + 4 + \frac{1}{2} = 21 + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = 21 - \frac{1}{6} = 20\frac{5}{6} (кв.од.)$$

Задача 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = 2x^2 - x - 2, y = - x^2 + x - 1.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній із системи їх рівнянь:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x - 2 \\ y = - x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x - 2 = - x^2 + x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1$$

$$= 0 \Rightarrow\Rightarrow D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16;$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - 4}{6} = - \frac{2}{6} = - \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + 4}{6} = 1;$$

$$y_1 = - \left(- \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} - 1 = - \frac{1}{9} - \frac{4}{3} = - \frac{1 + 12}{9} = - \frac{13}{9} = - 1\frac{4}{9};$$

$$y_2 = - 1 + 1 - 1 = - 1.$$

DDdddddddddd

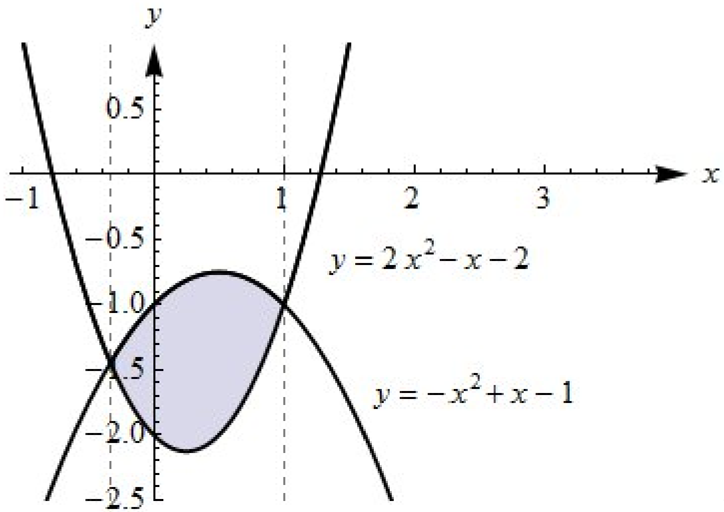

Рис.5

Отже, параболи перетинаються в точках $\left(-\frac{1}{3}; -1\frac{4}{9}\right)$ та (1;-1)

Зверху дана фігура обмежується параболою $y = -x^2 + x - 1$, а знизу параболою $y = 2x^2 - x - 2$. Тому площа фігури дорівнює:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} (y_в - y_н)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-x^2 + x - 1 - \left(2x^2 - x - 2\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-x^2 + x - 1 - 2x^2 + x + 2\right)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 3x^2 + 1\right)dx =$$

$$= \left(x^2 - x^3 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = 1 - 1 + 1 - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{3 + 1 - 9}{27} = 1 + \frac{5}{27} = \frac{32}{27}(кв.од.)$$

Задача 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, заданими в полярних координатах:

🎬 $\rho = 3\left(1+\sin\varphi\right),\ \varphi = 0,\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}.$

Розв'язання. Дана фігура обмежена двома променями

$\varphi = 0,\ \ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ і кривою $\rho = 3\left(1+\sin\varphi\right)$

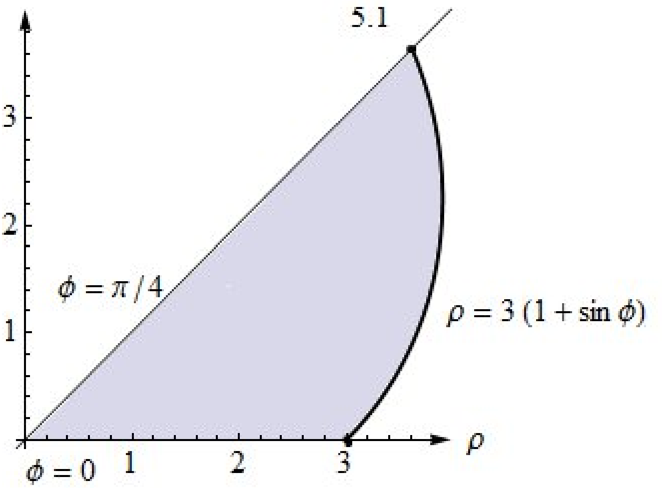

Рис.6

Площа фігури $s = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(3\left(1+\sin\varphi\right)\right)^2 d\varphi =$

$$= \frac{1}{2}\cdot 9\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\,sin\,\varphi + sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{9}{2}\left(\varphi - 2\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 2\cos\frac{\pi}{4} + 2\cos 0\right) +$$

$$+\frac{9}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) +$$

$$+\frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{8} - \frac{9\sqrt{2}}{2} + 9 + \frac{9\pi}{16} - \frac{9}{8} =$$

$$= \frac{18\pi + 9\pi}{16} - \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{72-9}{8} = \frac{27\pi}{16} - \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{63}{8} =$$

$$=\frac{27\pi-8\cdot 9\sqrt{2}+63\cdot 2}{16}=\frac{27\pi-72\sqrt{2}+126}{16}\approx$$

$$\approx 6{,}81(\text{кв.од.})$$

Задача 7. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=8x^2$, прямою $y=-6x+14$ та віссю Ox

Розв'язання. Знайдемо абсцису точки перетину прямої і параболи при $x>0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=8x^2, \\ y=-6x+14 \end{cases} \Rightarrow 8x^2=-6x+14 \Rightarrow 8x^2+6x-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x-7=0 \Rightarrow D=b^2-4ac=3^2-4\cdot 4\cdot(-7)=$$

$$=9+112=121=11^2;\ x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3+11}{2\cdot 4}=\frac{8}{8}=1.$$

Знайдемо абсцису точки перетину прямої з віссю Ox із системи рівнянь $\begin{cases} y=-6x+14 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -6x+14=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}.$

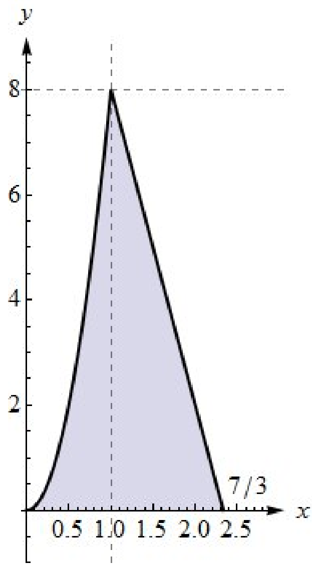

Рис.7

Дана фігура складається з двох частин: одна частина обмежена зверху параболою $y = 8x^2$, зліва і справа прямими $x = 0$, $x = 1$, відповідно; друга частина обмежена зверху прямою $y = -6x + 14$, зліва і справа прямими $x = 1$, $x = \frac{7}{3}$, відповідно. Тому площа фігури дорівнює сумі площ її частин

$$s = \int_0^1 8x^2 dx + \int_1^{\frac{7}{3}} (-6x + 14)\, dx = \left.\frac{8x^3}{3}\right|_0^1 +$$

$$+\left.\left(-\frac{6x^2}{2} + 14x\right)\right|_1^{\frac{7}{3}} = \frac{8}{3} + \left(-3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14\cdot\frac{7}{3}\right) -$$

$$-(-3 + 14) = \frac{8}{3} - \frac{49}{3} + \frac{98}{3} - 11 = \frac{57}{3} - 11 =$$

$$= 19 - 11 = 8(\textit{кв.од.})$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Григор'єва, Т.І. Вища математика: методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів фахової передвищої освіти за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія» [Електронний ресурс] / Т.І. Григор'єва // – Одеса: Національний університет «ОЮА», 2021. – Режим доступу: https://dspace.onua.edu.ua/items/b7dce954-95a7-4d13-93e8-b9aa5236b949
2. Вища математика ГЕФ (ЕО, ТЗНС, НЗ, 1 курс): метод. рек. до практич. робіт [Електронний ресурс] / Житомирська політехніка. – Житомир, 2022. – Режим доступу: https://learn.ztu.edu.ua/mod/folder/view.php?id=68642
3. Семенишина І.В., Марчук Н.А. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика» / І.В. Семенишина, Н.А. Марчук // Методичні рекомендації.– Кам'янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 2023. – 201 с.
4. Семенишина І.В., Марчук Н.А. Інтегральне числення функцій однієї та кількох змінних./ І.В. Семенишина,

Н.А. Марчук // Методичні рекомендації. – Кам’янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 2024. – 118 с.

СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна,

МАРЧУК Наталія Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

до практичних занять

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня

вищої освіти

за спеціальністю G3 Електрична інженерія