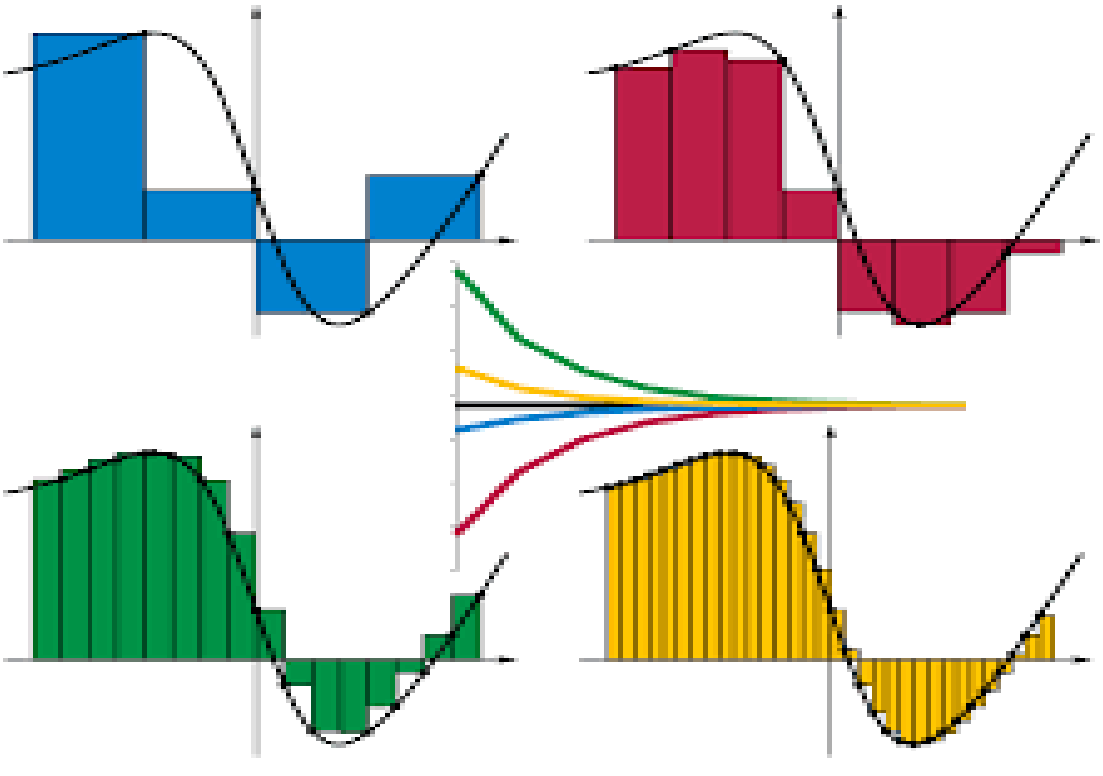
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ЕНЕРГЕТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра інформаційних технологій,
фізико-математичних та безпекових дисциплін

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

методичні рекомендації
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищоїосвіти за
спеціальністю H7 «Агроінженерія»



Кам’янець-Подільський
2026

УДК 517.3 (075.8)
Укладачі:

МАРЧУК Наталія Анатоліївна
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін,
СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»
протокол № 4 від 29 квітня 2026 р.

Рецензенти:

СМОРЖЕВСЬКИЙ Юрій Людвігович
кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики Кам´янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

КОМАРНІЦЬКИЙ Сергій Петрович
кандидат технічних наук, доцент,доцент кафедри транспортних технологій та засобів АПК Закладу вищої освіти «Подільський державний університет».

Інтегральне числення. Методичні рекомендації для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю H7 «Агроінженерія» / Н.А.МАРЧУК, І.В.СЕМЕНИШИНА. Кам’янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 2026. 151 с.

Методичні рекомендації з інтегрального числення призначені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти за спеціальністю H7 «Агроінженерія». У матеріалах викладено основні теоретичні положення, методи обчислення невизначених і визначених інтегралів, а також наведено приклади розв’язання типових задач і завдання для самостійної роботи.

Методичні рекомендації спрямовано на формування практичних навичок застосування інтегрального числення для розв’язання прикладних задач агроінженерного спрямування, розвиток аналітичного мислення та підготовку студентів до поточного й підсумкового контролю знань.

ЗМІСТ

ВСТУП.

Знання методів інтегрального числення дозволяє майбутнім фахівцям моделювати та досліджувати реальні явища, зокрема процеси теплообміну, руху рідин, енергетичних витрат, оптимізації виробничих процесів, а також здійснювати обробку експериментальних даних. Це сприяє розвитку аналітичного мислення, уміння застосовувати математичні методи у професійній діяльності та приймати обґрунтовані інженерні рішення.

Дані методичні рекомендації спрямовані на полегшення засвоєння теоретичних основ інтегрального числення та формування практичних навичок розв'язання задач. У матеріалах викладено основні поняття, властивості та методи обчислення невизначених і визначених інтегралів, а також наведено приклади їх застосування у задачах агроінженерного та загального спрямування.

Методичні рекомендації призначені самостійної роботи зобувачів, підготовки до практичних занять, модульного контролю та іспитів. Їх структура побудована таким чином, щоб забезпечити послідовне та системне засвоєння навчального матеріалу, а також сприяти розвитку навичок самостійного навчання і професійного зростання майбутніх фахівців

§ 1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основна задача диференціального числення полягає в знаходженні за заданою функцією $f(x)$ її похідної $f'(x)$ чи диференціала $df(x)=f'(x)dx$.
Наприклад, якщо $f(x)=\cos(x^2+1)$, то $f'(x)=-2x\sin(x^2+1)$, а $df(x)=-2x\sin(x^2+1)dx$.
Інтегральне числення розв'язує обернену задачу: за заданим диференціалом (похідною) невідомої функції потрібно визначити саму функцію. А саме: за заданою функцією $f(x)$ потрібно знайти функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.
Необхідність розв'язування оберненої задачі породжена практикою. Наприклад, якщо відомо закон прямолінійного руху тіла $S=S(t)$ (тут t – час, S – пройдений тілом шлях), то похідна $S'(t)$ визначає швидкість $v(t)$ руху тіла в момент часу t, тобто $S'(t)=v(t)$. На практиці частіше доводиться розв'язувати обернену задачу, коли відома швидкість v в момент часу t, і треба знайти пройдений шлях S за час t.
<u>Означення 1</u>. ***Первісною функцією*** для функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ (або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$) на відрізку $[a;b]$, тобто

$$F'(x) = f(x) \quad (dF(x) = f(x)dx). \tag{1.1}$$

▲ **Приклади**:

№ **1**. Функція $F(x) = \cos x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є первісною для функції $f(x) = -\sin x$, бо $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$.

№ 2. $f(x) = 4x^3$, то $F(x) = x^4$, тому що $(x^4)' = 4x^3$.

№ 3. $f(x) = \frac{1}{x}$, то $F(x) = \ln x$, оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

№ 4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $F(x) = 2\sqrt{x}$, бо $(F(x))' = (2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$.

№5. $f(x) = 3^x \ln 3$,то $F(x) = 3^x$, оскільки $(F(x))' = (3^x)' = = 3^x \ln 3 = f(x)$.▼

Можна помітити, що первісними для функції $f(x) = -\sin x$ є також функції $F(x) = \cos x + 3,\quad F(x) = \cos x - 1$ і $F(x) = \cos x + c$, де c – довільне дійсне число. Справді,

$$(\cos x + 3)' = -\sin x;\ (\cos x - 1)' = -\sin x;\ (\cos x + c)' = -\sin x.$$

Аналогічно, в прикладі № 2 функції $x^4 + 2,\quad x^4 + 7,\ x^4 - 4, \dots,\ x^4 + c$ також будуть первісними для функції $4x^3$. Те саме справедливо і для функцій, наведених в прикладах
№ 3– № 5.

Як бачимо, первісні для функції $f(x)$ можуть відрізнятися одна від одної на довільне дійсне число (довільну сталу). В зв'язку з цим виникає питання:
– якщо $f(x)$ має первісну $F(x)$, то скільки їх?
Відповідь на це питання дає наступне твердження.

◐ **Теорема 1**. Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має незліченну множину первісних $F(x)+c$, які відрізняються одна від одної на довільну сталу c.

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$. Доведемо, що $F(x)+c$, де c – довільна стала, також є первісною для функції $f(x)$. Дійсно,

$$(F(x)+c)' = (F(x))' + c' = F'(x) + 0 = f(x) \qquad ◑$$

Висновок. Якщо $f(x)$ має на заданому інтервалі первісну функцію $F(x)$, то цих первісних безліч. Крім того, з теореми випливає, що для функції $f(x)$ досить знайти одну її первісну $F(x)$; всі інші первісні одержимо, додаючи до неї сталу c. Всю сукупність первісних функцій для функції $f(x)$ можна записати у вигляді

$$F(x)+c, \tag{1.2}$$

де c – довільна стала, $c \in (-\infty; +\infty)$.

Наслідок з теореми 1. Якщо $F(x)$ і $\Phi(x)$ – дві первісні однієї і тієї функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то вони відрізняються одна від одної на сталу величину:

$$F(x)-\Phi(x)=c \quad (F(x)=\Phi(x)+c). \tag{1.3}$$

<u>Означення 2.</u> Сукупність всіх первісних функцій для функції $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом*** і позначається

$$\int f(x)dx. \tag{1.4}$$

При цьому

$f(x)$ називається ***підінтегральною функцією,***

$f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом,***

$\int$ ***– знак інтеграла,***

x ***– змінна інтегрування.***

Отже, якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+c. \tag{1.5}$$

Знаходження невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ називається ***інтегруванням*** цієї функції.

▲ **Приклади**:

№ 6. $\int 2x dx = x^2 + c$, оскільки $(x^2+c)' = 2x$.

№ 7. $\int 3x^2 dx = x^3 + c$, тому що $(x^3+c)' = 3x^2$.

№ 8. $\int \cos x dx = \sin x + c$, бо $(\sin x + c)' = \cos x$.

№ 9. $\int e^x dx = e^x + c$, оскільки $(e^x + c)' = e^x$.

№ 10. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad (x>0)$, тому що $(\ln x + c)' = \frac{1}{x}$.

№ 11. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$, бо $\left(-\frac{1}{x}+c\right)' = \frac{1}{x^2}$. ▼

Користуючись вище наведеними прикладами, можна сказати, що інтегрування є дія, обернена до диференціювання, тобто інтегрування – перехід від похідної деякої функції до самої функції.

Виникає питання: чи для кожної функції $f(x)$ існує первісна функція $F(x)$?

Будь-яка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну функцію, а отже і невизначений інтеграл.

В подальшому, при знаходженні невизначених інтегралів від функцій, будемо розглядати функції тільки в інтервалах їх неперервності, тому немає

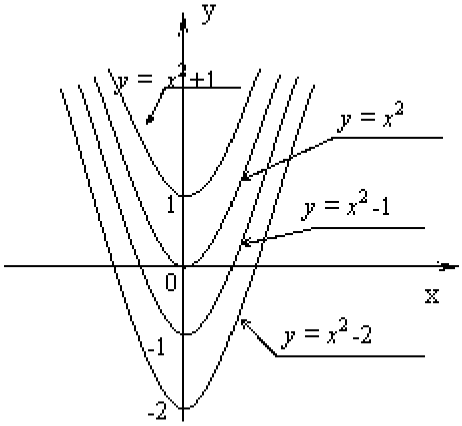


Рис. 218 б

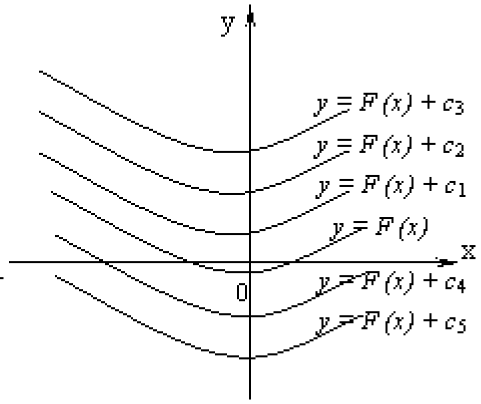


Рис. 218 а

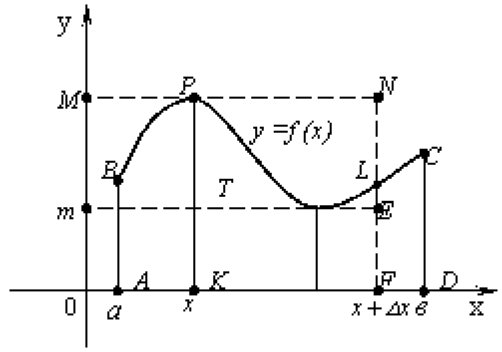


Рис. 219

необхідності кожний раз називати умови існування цих невизначених інтегралів, чи первісних.

Графік первісної від функції $f(x)$ називають ***інтегральною кривою***.

Геометрично невизначений інтеграл $F(x)+c$, де c – довільна стала, можна інтерпретувати як сукупність(сім'ю) інтегральних кривих (рис.218.а). Кожну з інтегральних кривих цієї сукупності можна одержати, зсуваючи вздовж осі OY паралельно до самого себе графік первісної $y=F(x)$.

▲ **Приклад № 12**. Розглянемо функцію $f(x)=2x$. Первісною для неї буде функція $F(x)=x^2$; невизначений інтеграл – $\int f(x)dx = x^2+c$.

Отже, геометрично інтеграл є сукупність інтегральних кривих $y=x^2+c$ (рис.218.б). ▼

Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана невід'ємна неперервна функція $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ (рис.219).

Розглянемо задачу про обчислення площі фігури $ABCD$, яка обмежена кривою $y=f(x)$, прямими $x=a$ та $x=b$ і відрізком осі OX, який має довжину $(b-a)$. Таку фігуру називають ***криволінійною трапецією.***

Позначимо через S величину площі криволі-нійної трапеції $ABCD$. Виберемо фігуру $ABPK$, що обмежена кривою $y=f(x)$, яка лежить між ординатою при $x=a$ та ординатою в довільній точці x, і відрізком AK осі OX. Позначимо площу цієї фігури через $S(x)$. Якщо x змінюється, то площа фігури $ABPK$ буде також змінюватися.

Надамо x довільного приросту $\Delta x>0$ (за умови, що $x+\Delta x\in[a;b]$). Тоді функція $S(x)$ дістане приріст $\Delta S(x)$ ($\Delta S(x)$ – площа фігури $KPLF$). За теоремою 29 (Розділ ІІІ, § 10) функція $f(x)$ на відрізку $[x;x+\Delta x]$ досягає найбільшого і найменшого значень, які позначимо через M і m відповідно (рис.219). Побудуємо прямокутники $KPNF$ та $KTEF$ з висотами M і m за основою $KF = \Delta x$. Площі цих прямокутників відповідно дорівнюють $M \cdot \Delta x$ та $m \cdot \Delta x$. Фігура $KPLF$, площа якої $\Delta S(x)$, знаходиться між площами прямокутників $KPNF$ та $KTEF$, причому ці площі задовольняють нерівності

$m \cdot \Delta x < \Delta S(x) < M \cdot \Delta x.$

Оскільки $\Delta x > 0$, то звідси дістанемо нерівність

$$m < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < M. \tag{1.6}$$

Якщо $\Delta x \to 0$, а функція $f(x)$ неперервна, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x),$$

тоді, перейшовши в нерівності (5.6) до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Але $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x)$, тому $S'(x) = f(x)$.

Отже, похідна від змінної площі $S(x)$ по сталій абсцисі дорівнює скінченній ординаті $y = f(x)$: $S'(x) = f(x)$.

Інакше говорять, що $S(x)$ є первісною функцією для функції $f(x)$, тобто змінна площа $S(x)$ криволінійної трапеції є первісною для заданої функції $f(x)$. Ця первісна має таку властивість: при $x = a$, $S(a) = 0$.

Тому, якщо $F(x)$ – будь-яка інша функція для функції $f(x)$, то $S(x) = F(x) + c$. Оскільки $S(a) = 0$, то $F(a) + c = 0$, звідки $c = -F(a)$. Тому $S(x) = F(x) - F(a)$ для $x \in [a; b]$.

Зазначимо, що площу всієї криволінійної трапеції $ABCD$ знайдемо, якщо покладемо $x = b$:

$$S = F(b) - F(a). \tag{1.7}$$

§ 2. ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ

Основні властивості невизначеного інтеграла

◐ 1). Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{1.8}$$

Доведення. Нехай маємо функцію $f(x)$. Проінтегруємо її, тобто розглянемо $\int f(x)dx$. За означенням первісної, маємо

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x)+c' = f(x). \quad ◑$$

◐ 2). Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \tag{1.9}$$

Доведення. Ця властивість доводиться аналогічно властивості 1) за означенням первісної:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+c\right) = dF(x) + dc = F'(x)dx = f(x)dx. \quad ◑$$

◐ 3). Невизначений інтеграл від диференціала неперервно-диференційовної функції дорівнює самій функції з точністю до довільної сталої

$$\int dF(x) = F(x)+c. \tag{1.10}$$

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+c.$

Тут $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. ◑

Зауваження. У властивостях 2), 3) знаки d і $\int$, які ідуть слідом один за одним в тому чи іншому порядку, взаємно знищуються з точністю до сталої. Тому дії диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими математичними діями.

	Таблиця похідних	Таблиця диференціалів	Таблиця основних інтегр
1.	$(c)' = 0$	$dc = 0 \cdot dx = 0$	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$(x)' = 1$	$d(x) = 1 \cdot dx$	$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$
3.	$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$	$d\left(x^{n+1}\right) = (n+1)x^n dx$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ при $n \neq$
4.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
5.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$-d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{dx}{x^2}$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \mid x \mid + c$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x\, dx$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x\, dx$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
9.	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(tg\, x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + c$
10.	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(ctg\, x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + c$
11.	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(arctg\, x) = \frac{1}{1+x^2} dx$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} arctg\, x + c, \\ -arcctg\, x + c \end{array}\right.$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c \end{array}\right.$
13.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx,\ \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a} = a^x dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
14.	$\left(e^x\right)' = e^x$	$d\left(e^x\right) = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + c$
15.	$\left(arctg \frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$d\left(arctg \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2 + x^2} dx,$ $\frac{1}{a} d\left(arctg \frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c \end{array}\right.$
16.	$\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$d\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{array}\right.$
17.	$\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$d\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm a}$

18.	$\left(\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|\right)' = \frac{2a}{x^2-a^2}$	$d\left(\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|\right) = \frac{2a\cdot dx}{x^2-a^2}$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+c$
19.	$\left(\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+c\right)' = \frac{1}{\sin x}$	$d\left(\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+c\right) = \frac{dx}{\sin x}$	$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+c$
20.	$\left(\ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\|+c\right)' = \frac{1}{\cos x}$	$d\left(\ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\|+c\right) = \frac{dx}{\cos x}$	$\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+c$

Звідси дістанемо правило для перевірки правильності знаходження первісної функції чи невизначеного інтеграла для заданої функції. Для цього тільки потрібно продиференціювати знайдену первісну. Якщо дістанемо підінтегральну функцію, то первісна знайдена правильно.

◐ 4). Якщо число $a \neq 0$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{1.11}$$

Доведення. Знайдемо похідну від функції, яка стоїть у правій частині рівності (5.11), маємо

$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' =$[за властивістю 1)]$= a\,f(x)$

Отже функція $a\int f(x)dx$ є первісною для функції $a\,f(x)$. ◑

◐ 5). Невизначений інтеграл від алгебричної суми скінченного числа неперервних функцій дорівнює алгебричній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm\ldots\pm \int f_n(x)dx. \tag{1.12}$$

Доведення. Доведемо цю властивість для випадку двох функцій. Знайдемо похідну від алгебричної суми $\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$, маємо

$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' =$[за властивістю 1)]$= f_1(x)\pm f_2(x)$, що й треба було довести. ◑

Доведення для скінченного числа функцій проводиться аналогічно.

Як було зазначено вище, дії диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими. Розглядаючи таблицю похідних, диференціалів і властивість (1.10), складемо відповідну таблицю невизначених інтегралів.

▲ **Приклад № 13**. $\int\left(x^5+\sqrt{x}+\sin x\right)dx =$[за властивістю (5.12)] $= \int x^5dx + \int\sqrt{x}\,dx + \int \sin x\,dx =$[за формулами 3, 8 із таблиці] $= \frac{x^6}{6} + \int x^{\frac{1}{2}}dx + (-\cos x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - \cos x + c = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \cos x + c.$

Перевірка: $\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\cos x+c\right)'=(\frac{1}{6}x^6)'+(\frac{2}{3}\sqrt{x^3})'-(\cos x)'+(c)'=$

$=\frac{1}{6}\cdot 6x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}+\sin x=x^5+\sqrt{x}+\sin x.$

Дістали підінтегральну функцію $x^5+\sqrt{x}+\sin x$. Це означає, що інтеграл $\int\left(x^5+\sqrt{x}+\sin x\right)dx$ знайдено правильно. ▼

Як неважко помітити, дія інтегрування набагато складніша, ніж дія диференціювання. Слід відмітити той факт, що при інтегруванні функцій не існує єдиного правила, за допомогою якого можна було б обчислити первісні від добутку, частки, складної функції, в той час як при диференціюванні складної функції існує теорема про похідну складної функції, застосувавши яку та використовуючи таблицю похідних, знаходимо похідну складної функції. В кожному окремому випадку потрібно знайти такий прийом, який допоможе найвигіднішим способом відшукати первісну функцію. Уміння знаходити потрібний спосіб виробляються практикою.

§ 3. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Розглянемо декілька способів, які в багатьох випадках дозволяють звести той чи інший інтеграл до табличного.

3.1. Інтегрування розкладанням

Інтегрування розкладанням – це метод зведення заданого інтеграла до суми більш простих інтегралів, які знаходяться в таблиці основних інтегралів.

▲ Приклад № 14.

$$\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx=\begin{bmatrix}\text{розкладемо цей}\\ \text{інтеграл на суму}\\ \text{трьох інтегралів}\end{bmatrix}=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{скористаємось формулами}\\ \text{3, 6 (з таблиці інтегралів)}\\ \text{і властивістю 4}\end{bmatrix}=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|+c.$$

▼

▲ Приклад № 15. $\int\frac{5x^8+7}{x^4}dx=\begin{bmatrix}\text{поділимо почленно}\\ \text{чисельник на знаменник}\end{bmatrix}=$

$=\int\left(\frac{5x^8}{x^4}+\frac{7}{x^4}\right)dx=\left[\text{за властивістю 5)}\right]=\int 5x^4dx+\int\frac{7}{x^4}dx=$

$=\begin{bmatrix}\text{оскільки } a^{-n}=\frac{1}{a^n}\text{, тоді за}\\ \text{властивістю (5.11), дістанемо}\end{bmatrix}=5\int x^4dx+7\int x^{-4}dx=5\cdot\frac{x^5}{5}+7\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+c=x^5-\frac{7}{3x^3}+c.$ ▼

▲ Приклад № 16. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx = \left[\begin{array}{l}\text{скористаємось формулою}\\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{array}\right] =$

$= \int \frac{(\sqrt{x})^3 - 3(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} - 1}{x}dx = \left[\begin{array}{l}\text{ділимо чисельник}\\ \text{на знаменник}\end{array}\right] = \int \frac{x^{3/2}}{x}dx -$

$- \int \frac{3x}{x}dx + \int \frac{3\sqrt{x}}{x}dx - \int \frac{1}{x}dx = \int x^{1/2}dx - \int 3dx + \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{dx}{x} = = \frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + c.$ ▼

▲ Приклад № 17. $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx = \left[\begin{array}{l}\text{перемножимо під -}\\ \text{інтегральні функції}\end{array}\right] = \int\left(e^x - \frac{e^x e^{-x}}{x^2}\right)dx =$

$= \int\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int e^x dx - \int \frac{1}{x^2}dx = e^x + \frac{1}{x} + c.$ ▼

▲ Приклад № 18. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \left[\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\right] =$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = = -ctg\, x - tg\, x + c.$ ▼

▲ Приклад № 19. $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx = \left[\begin{array}{l}\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \alpha = \frac{x}{2}\end{array}\right] =$

$= \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + c.$ ▼

▲ Приклад № 20. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \left[\begin{array}{l}\text{скористаємось формулою}\\ \text{скороченого множення}\\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\\ \text{запишемо } x^4 - 1^4 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1)\end{array}\right] =$

$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx + arctg\, x = \int(x^2-1)dx + arctg\, x =$

$= \frac{x^3}{3} - x + arctg\, x + c.$ ▼

▲ Приклад № 21. $\int tg^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tg\, x - x + c.$ ▼

3.2. Інтегрування безпосередньо

Метод безпосереднього інтегрування (або інакше його називають "інтегрування внесенням під знак диференціала") побудований за властивістю інваріантності формул інтегрування:

якщо $\int f(x)dx = F(x)+c$,

то $$\int f(u)du = F(u)+c, \tag{1.13}$$

де $u=\varphi(x)$ – деяка неперервно-диференційовна функція.

Отже, інтегрувати можна не тільки за незалежною змінною, а і за функцією.

Використовуючи властивість (5.13) і такі перетворення диференціала

$$2x\,dx = d\left(x^2\right), \tag{1.14}$$

$$\cos x\,dx = d\,(\sin x), \tag{1.15}$$

$$\frac{dx}{x} = d\,(\ln x), \tag{1.16}$$

$d\,(x+b)=dx,\quad d\,(ax)=a\,dx,$ звідки $dx=\dfrac{1}{a}d\,(ax),$

$$dx=\frac{1}{a}d\,(ax+b). \tag{1.17}$$

Інтегрують безпосередньо підінтегральні вирази $f(x)dx$, які зводяться до вигляду $q(u)du$

$$\begin{pmatrix} f(x)dx = q(\varphi(x))\varphi'(x)dx = q(u)du, \\ \text{тут} \quad u=\varphi(x) \end{pmatrix}.$$

▲ **Приклад № 22.** $\int\sqrt{x-1}dx = \begin{bmatrix}\text{скористаємось властивістю} \\ \text{диференціала} \quad dx = d\,(x-1)\end{bmatrix} =$

$$= \int (x-1)^{1/2} d\,(x-1) = \begin{bmatrix} \text{відомо, що } \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1; \\ \int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c. \quad \text{У нас} \quad u=x-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(x-1)^{1/2+1}}{3/2}+c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 23.** $\int\dfrac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \int\left(1+x^2\right)^{-1/2}d\left(1+x^2\right) = \left|\int u^{-1/2}du = 2\sqrt{u}+c\right| = 2\sqrt{1+x^2}+c.$
▼

▲ **Приклад № 24.** $\int(x+1)^{15}dx = \left[dx = d\,(x+1)\right] =$

$= \int(x+1)^{15}d\,(x+1) = \left[\int u^{15}du = \dfrac{u^{16}}{16}+c\right] = \dfrac{(x+1)^{16}}{16}+c.$ ▼

▲ **Приклад № 25.**

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x\,dx=\frac{1}{2}d\left(x^2\right)= \\ =-\frac{1}{2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right)\end{array}\right]=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{1/2}d\left(1-x^2\right)=\left[\int u^{1/2}du\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+c=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 26.** $\int\sin^3 x\cos x\,dx=\left[\cos x\,dx=d\left(\sin x\right)\right]=$

$$=\int\left(\sin x\right)^3 d\left(\sin x\right)=\left[\int u^3du\right]=\frac{1}{4}\sin^4 x+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 27.**

$$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\left[\frac{dx}{x}=d\left(\ln x\right)\right]=\int\sqrt{\ln x}\,d\left(\ln x\right)=\frac{\left(\ln x\right)^{3/2}}{3/2}+c=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\left(\ln x\right)^3}+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 28.**

$$\int\cos 5x\,dx=\left[\begin{array}{l}\int\cos x\,dx=\sin x+c\\ \int\cos u\,du=\sin u+c\\ dx=\frac{1}{5}d\left(5x\right)\end{array}\right]=\int\frac{1}{5}\cos(5x)d(5x)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 29.**

$$\int\sin\left(2x-3\right)dx=\left[\begin{array}{l}\int\sin u\,du=-\cos u+c,\\ d\left(2x-3\right)=2dx,\\ dx=\frac{1}{2}d\left(2x-3\right)\end{array}\right]=$$

$$=\int\sin\left(2x-3\right)\cdot\frac{1}{2}d\left(2x-3\right)=\frac{1}{2}\int\sin\left(2x-3\right)d\left(2x-3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos(2x-3)\right)+c=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 30.**

$$\int\frac{dx}{1-8x}=\left[\begin{array}{l}\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c,\\ d\left(1-8x\right)=-8dx,\quad dx=-\frac{1}{8}d\left(1-8x\right)\end{array}\right]=\int\frac{d(1-8x)}{-8(1-8x)}=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(1-8x\right)}{1-8x}=\left[\int\frac{du}{u}\right]=-\frac{1}{8}\ln|1-8x|+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 31.**

$$\int\frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}dx=\left[\begin{array}{l}\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c,\\ d\left(1-3e^{2x}\right)=-6e^{2x}dx,\\ e^{2x}dx=-\frac{1}{6}d\left(1-3e^{2x}\right)\end{array}\right]=\int\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{d\left(1-3e^{2x}\right)}{1-3e^{2x}}=-\frac{1}{6}\ln|1-3e^{2x}|+c.$$ ▼

▲ **Приклад №**

32. $\int ctgx\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\begin{bmatrix}d(\sin x)=\cos x\,dx\\ \cos x\,dx=d(\sin x)\end{bmatrix}==\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\left[\int\frac{du}{u}\right]=\ln|\sin x|+c.$ ▼

▲ **Приклад №**

33. $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx=\begin{bmatrix}\text{оскільки } d(1+3\cos x)=-3\sin x\,dx,\\ \text{то } \sin x\,dx=-\frac{1}{3}d(1+3\cos x)\end{bmatrix}=$

$=\int\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}==-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+c$ ▼

▲ **Приклад № 34.** $\int\cos^3 x\cdot\sin x\,dx=[\sin x\,dx=-d(\cos x)]=$

$=\int(\cos x)^3(-d(\cos x))=-\frac{1}{4}\cos^4 x+c.$ ▼

▲ **Приклад № 35.** $\int e^{x^3}\cdot x^2dx=\begin{bmatrix}\text{маємо } \int e^u du=e^u+c,\\ \text{де } u=x^3 \quad \left(e^{x^3}=e^u\right)\\ \text{і } d(x^3)=3x^2dx,\\ \text{звідки } x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)\end{bmatrix}=$

$=\int e^{x^3}\cdot\frac{1}{3}d(x^3)=\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)=\left[\int e^u du\right]=\frac{1}{3}e^{x^3}+c.$ ▼

▲ **Приклад № 36.** $\int\sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4dx=\begin{bmatrix}\int\sqrt[3]{u}\,du=\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4}+c, \quad u=1-6x^5;\\ d(1-6x^5)=-30x^4dx, \quad \textit{звідси}\\ x^4dx=-\frac{1}{30}d(1-6x^5)\end{bmatrix}=$

$=\int(1-6x^5)^{1/3}\left(-\frac{1}{30}\right)d(1-6x^5)=-\frac{1}{30}\int(1-6x^5)^{1/3}d(1-6x^5)=$

$=-\frac{1}{40}\sqrt[3]{(1-6x^5)^4}+c.$ ▼

▲ **Приклад № 37.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}=\left[\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+c\right]=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(5x)^2}}=\begin{bmatrix}d(5x)=5dx,\\ dx=\frac{1}{5}d(5x)\end{bmatrix}=\int\frac{1}{5}\frac{d(5x)}{\sqrt{1-(5x)^2}}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\sqrt{1-(5x)^2}}=$

$=\left[\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u=5x\right]=\frac{1}{5}\arcsin 5x+c.$ ▼

Зауваження: 1. Диференціюючи степеневу функцію (x^k), помічаємо, що її показник степеня зменшується на одиницю (1), адже $(x^k)'=k\,x^{k-1}$, а при внесенні її під знак диференціала – збільшується на одиницю (1), адже $x^k dx = \frac{d\left(x^{k+1}\right)}{k+1}$. Якщо потрібно проінтегрувати функцію вигляду $f\left(a+b\,x^{k+1}\right)\cdot x^k$, де $f(u)$ така функція, що $\int f(u)du$ є до табличним, то можна внести x^k під знак диференціала

$$\left(x^k dx = \frac{d\left(x^{k+1}\right)}{k+1} = \frac{1}{(k+1)b} d\left(a+b\,x^{k+1}\right)\right)$$

і проінтегрувати вираз $f\left(a+b\,x^{k+1}\right)\frac{d\left(a+b\,x^{k+1}\right)}{b(k+1)}$ безпосередньо.

2. Під знак диференціала, як правило, вносять ту функцію, похідна якої міститься під знаком інтеграла як множник. Наприклад, $\int e^{x^2}\cdot\underbrace{x\,dx}$. Тут одним із множників при dx є функція x, тому вносимо її під знак диференціала, оскільки $x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$

3. Якщо чисельник дробової підінтегральної функції є похідною від знаменника, то первісна такої функції дорівнює натуральному логарифму модуля знаменника:

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int\frac{d\left(f(x)\right)}{f(x)} = \left[\begin{array}{l}\int\frac{du}{u} = \ln|u|+c,\\ \text{де}\quad u = f(x)\end{array}\right] = \ln|f(x)|+c.$$

3.3. Метод підстановки

Одним із найбільш сильних методів знаходження інтегралів є ***метод підстановки.***

Нехай треба знайти невизначений інтеграл $\int f(x)dx$, який не є табличним.

Якщо підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна записати у вигляді

$$f(x)dx = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \eta(t)dt, \tag{1.18}$$

$$f(x)dx = q(u(x))u'(x)dx = q(u)du \tag{1.19}$$

так, що $\int q(u)du$ (чи $\int\eta(t)dt$) є табличним, то тоді вводять нову змінну. Тут використовують властивість (5.11) незалежності невизначеного інтеграла від вибору змінної інтегрування.

Справедливо наступне твердження.

◐ **Теорема**. Нехай функція $G(t)$ є первісною для функції $q(t)$, тобто $\int q(t)dt = G(t)+c$. Тоді $\int q(\omega(x))\cdot\omega'(x)dx = G(\omega(x))+c.$

Доведення. Позначимо $\omega(x)=t$. Оскільки $G'(t)=q(t)$, а $\frac{d}{dx}\left(G(\omega(x))\right)=\frac{dG}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}=\frac{dG}{dt}\cdot\frac{d\omega}{dx}=G'(t)\cdot\omega'(x)=q(t)\cdot\omega'(x)=q(\omega(x))\cdot\omega'(x)$

Отже, $G(\omega(x))$ – первісна для $q(\omega(x))\cdot\omega'(x)$. ◑

Можливі два випадки:

1). Нехай первісну для функції $f(x)$ обчислити не можемо раніше відомими методами, але знаємо, що вона існує і може бути зображена елементарними функціями. Зробимо заміну змінної $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$– неперервно-диференційовна функція, яка має обернену $t=\psi(x)$. Записуємо це так:

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{bmatrix}=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=$$
$$=\int\Phi(t)dt=F(t)+c=\left[t=\psi(x)\right]=F(\psi(x))+c. \qquad (1.20)$$

2). При інтегруванні інколи доцільніше вводити нову змінну у вигляді $t=u(x)$. Тоді

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix}t=u(x)\\ dt=u'(x)dx\end{bmatrix}.$$

Розглянемо ці два випадки на прикладах.

▲ Приклад № 38.

$$\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\begin{bmatrix}\text{зробимо підстановку } x^2=t,\\ \text{обчислимо диференціал від}\\ \text{лівої і правої частин:}\\ d\left(x^2\right)=dt;\quad 2x\,dx=dt.\\ \text{Це випадок 2), коли }\ t=u(x)\end{bmatrix}=$$

$$=\int e^t dt=e^t+c=\begin{bmatrix}\text{оскільки шуканий інтеграл є функцією змінної}\\ \text{x, то і його первісна повинна бути функцією}\\ \text{тієї самої змінної x, тому після введення "нової"}\\ \text{змінної і після знаходження первісної "нової"}\\ \text{функції, повертаємося до "старої" змінної : } t=x^2\end{bmatrix}=e^{x^2}+c.$$ ▼

▲ Приклад № 39.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=\begin{bmatrix}\text{підстановка }\ x=t^2,\\ \text{тоді }\ dx=2t\,dt\text{. Це}\\ \text{випадок 1), тому була}\\ \text{зроблена підстановка } x=\varphi(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{t}{t-1}\cdot 2t\,dt=2\int\frac{t^2}{t-1}dt=2\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt=2\int\frac{t^2-1}{t-1}dt+2\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=2\int(t+1)dt+2\ln|t-1|=2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+c=$$

$$=t^2+2t+2\ln|t-1|+c=\begin{bmatrix}\text{повертаємося до}\\ \text{"старої" змінної }\ \sqrt{x}=t\end{bmatrix}=x+2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-1|+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 40.**
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\begin{bmatrix}x+1=t^2\\ x=t^2-1\\ dx=2t\,dt\end{bmatrix}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t}=$$
$$=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=\left[\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\int\frac{d(t-1)}{t-1}-\int\frac{d(t+1)}{t+1}=\ln|t-1|-$$
$$-\ln|t+1|+c=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\left[t=\sqrt{x+1}\right]=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c.$$
▼

▲ **Приклад № 41.**
$$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\begin{bmatrix}x+1=t^3\\ x=t^3-1\\ dx=3t^2dt\end{bmatrix}=\int\frac{3t^2dt}{1+t}=$$
$$=3\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=3\int\frac{(t-1)(t+1)}{t+1}dt+3\int\frac{dt}{t+1}=3\int(t-1)dt+3\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$
$$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+c=\left[t=\sqrt[3]{x+1}\right]==3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|\right)+c.$$
▼

В попередніх прикладах нам довелося знаходити x через t, а dx через t і dt. В багатьох випадках (але не завжди) така дія не виконується, а після введення підстановки $t=\psi(x)$ знаходять диференціал лівої і правої частин цієї рівності.

Приклад № 42. Знайти $\int\frac{\sin 5x\,dx}{4+2\cos 5x}$.

▲
$$\int\frac{\sin 5x\,dx}{4+2\cos 5x}=\begin{bmatrix}t=4+2\cos 5x\\ dt=-10\sin 5x\,dx,\\ \text{звідки }\ \sin 5x\,dx=-\frac{1}{10}dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{10}\ln|t|+c=$$
$$=-\frac{1}{10}\ln|4+2\cos 5x|+c.$$
▼

Зауваження: За нову змінну t треба вибирати таку функцію $\varphi(x)=t$, щоб:

1) під знаком інтеграла був би явний диференціал від $\varphi(x)$ $(d\varphi=\varphi'(x)dx)$, або його можна утворити за допомогою множення чи ділення на деяке, відмінне від нуля число;

2) інтеграл (1.18) $\int\eta(t)dt$ (так само і інтеграл (1.19)) був би табличним.

Випишемо найбільш часто застосовні підстановки:

1) $\int f(x^2)x\,dx=\frac{1}{2}\int f(x^2)\,d(x^2)$, підстановка $t=x^2$;

2) $\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(\sin x)d(\sin x)$, підстановка $t=\sin x$;

3) $\int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(\cos x)d(\cos x)$, підстановка $t=\cos x$;

4) $\int f(ctg\,x)\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int f(ctg\,x)d(ctg\,x,)$,підстановка $t=ctg\,x;$

5) $\int f(tg\,x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int f(tg\,x)d(tg\,x),$ підстановка $t=tg\,x;$

6) $\int f(\ln\,x)\frac{dx}{x}=\int f(\ln\,x)d(\ln\,x),$ підстановка $t=\ln\,x;$

7) $\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$, підстановка $t=\arcsin\,x;$

8) $\int f(\arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int f(\arccos x)d(\arccos x),$ підстановка $t=\arccos x;$

9) $\int f(arctg\,x)\frac{dx}{1+x^2}=\int f(arctg\,x)d(arctg\,x),$ підстановка $t=arctg\,x;$

10) $\int f(arcctg\,x)\frac{dx}{1+x^2}=-\int f(arcctg\,x)d(arcctg\,x),$ підстановка $t=arcctg\,x;$

11) $\int f(x^{k+1})x^k dx=\frac{1}{k+1}\int f(x^{k+1})d(x^{k+1}),$ підстановка $t=x^{k+1}.$

3.4. Інтегрування частинами

Нехай треба обчислити $\int f(x)dx$. При цьому розглянемо такий випадок, коли підінтегральний вираз можна подати у вигляді добутку функції $u(x)$ і диференціала деякої функції $\nu(x)$, тобто

$$f(x)dx=u(x)\cdot d\,\nu(x). \quad (1.21)$$

Вираз $u\,d\nu$ уже зустрічали раніше, коли обчислювали диференціал добутку двох неперервно-диференційовних функцій u і ν. Нагадаємо, що $d(u\,\nu)=du\cdot\nu+u\cdot d\,\nu$, звідки

$$u\,d\nu=d(u\,\nu)-\nu du. \quad (1.22)$$

Проінтегруємо ліву і праву частини рівності (5.22):

$$\int u\,d\nu=\int d(u\nu)-\int \nu\,du.$$

За властивістю (5.10), маємо

$$\int u\,d\nu=u\,\nu-\int \nu\,du. \quad (1.23)$$

Ця формула називається формулою ***інтегрування частинами***.

Отже, якщо $f(x)dx$ можна подати у вигляді (1.21), то тоді $\int f(x)dx$ можна обчислити за формулою (1.23).

Як бачимо, для того, щоб використати формулу (1.23), підінтегральний вираз розбивається на два множники u і $d\,\nu$, перший з яких повинен диференціюватися (в формулі (1.23) міститься диференціал du, який знаходимо диференціюванням u), а другий – інтегруватися (в правій частині (1.23) маємо множник ν, який знаходиться з $d\nu$ інтегруванням). При цьому співмножники u і dv вибирають так, щоб після диференціювання u та інтегрування dv інтеграл $\int v\,du$ (в правій частині (1.23)) став простішим, ніж $\int u\,dv$, що стоїть у лівій частині (1.23). Якщо при такому виборі u і dv інтеграл $\int v\,du$ стане складнішим, ніж $\int u\,dv$, то потрібно вибрати інші вирази для u і dv, чи перейти до іншого методу інтегрування.

Уміння розбивати підінтегральний вираз на множники u і dv, так, щоб інтеграл $\int v\,du$ став простішим, ніж $\int u\,dv$, виробляються в процесі розв'язування прикладів. Але для деяких видів підінтегральних виразів існують певні рекомендації до вибору функції u і dv, а саме:

1). Якщо треба обчислити $\int f(x)dx$ і при цьому

$$f(x)\,dx = P(x)\cdot\left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \cos\alpha x \\ \sin\beta x \\ a^{bx} \end{matrix}\right\} dx, \tag{1.24}$$

де $P(x)$ – алгебраїчний многочлен степеня n або степенева функція, тоді вибираємо

$$u = P(x), \quad dv = \left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \cos\alpha x \\ \sin\beta x \\ a^{bx} \end{matrix}\right\} dx.$$

При цьому інтеграли

$$\int P(x)\cdot\left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \cos\alpha x \\ \sin\beta x \\ a^{bx} \end{matrix}\right\} dx$$

обчислюються n – кратним інтегруванням частинами.

2). Якщо

$$f(x)dx = P_n(x)\cdot\left\{\begin{matrix} \ln^m x, \quad m > 0 \\ \log_a x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctg\,x \\ arcctg\,x \end{matrix}\right\} dx, \tag{1.25}$$

то вибираємо

$$u=\begin{Bmatrix} \ln^m x, \quad m>0 \\ \log_a x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctg\, x \\ arcctg\, x \end{Bmatrix}, \quad d\nu = P_n(x)dx.$$

3). $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,$

$$\int\cos(\ln x)\,dx, \quad \int\sin(\ln x)dx. \tag{1.26}$$

До обчислення інтегралів виду (1.26) застосовують два рази метод інтегрування частинами, в результаті чого одержують в правій частині заданий інтеграл, який переносять вліво і знаходять як невідому з рівняння з однією змінною.

Зауважимо, що при обчисленні інтегралів (1.26) значення немає, яку саме із функцій взяти за u, а який вираз – за $d\nu$. Слід пам'ятати, що якщо на першому кроці на u вибрали, наприклад, e^{ax}, то і на другому кроці цю саму функцію вибирають за u.

Приклад № 43. Обчислити $\int x\cos 2x\,dx$.

▲ Зауважимо, що якщо візьмемо $u=\cos 2x$, $d\nu = x\,dx$, то $du=-2\sin 2x\,dx$ а $\nu=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}$. Тоді, за формулою (1.23), маємо

$$\int\cos 2x\cdot x\,dx=\cos 2x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}(-2\sin 2x)dx.$$

Бачимо, що при такому виборі u і $d\nu$ інтеграл став складнішим і обчислити його не зможемо.

Виберемо $u=x$, а $d\nu=\cos 2x\,dx$. Шуканий інтеграл запишемо у вигляді

$$\int\underset{u}{x}\underbrace{\cos 2x\,dx}_{d\nu}=\left[\int u\,d\nu=u\nu-\int\nu\,du\right] \tag{1.27}$$

В правій частині (1.27) невідомими є функція ν і диференціал du. Знайдемо їх. З рівності $d\nu=\cos 2x\,dx$, знаходимо

$$\int d\nu=\int\cos 2x\,dx.$$

Застосовуючи властивість (1.10) до лівої частини, знайдемо

$\nu=\int\cos 2x\,dx=\left[\int\cos u\,du\right]=\dfrac{1}{2}\sin 2x$. При знаходженні ν при-ймаємо сталу $c=0$.

Оскільки $u=x$, то $du=u'dx=(x)'\,dx=dx$. Отже,

$$\int\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\cos 2x\,dx}_{d\nu}=\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{\nu}-\int\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{\nu}\underbrace{dx}_{du}=\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\frac{d(2x)}{2}= =\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c.$$ ▼

▲ **Приклад № 44**

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\int\underset{u}{\ln x}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^3}dx}_{d\nu}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{тут } f(x)dx=\ln x\cdot x^{-3}dx=P_3^{-1}(x)\ln x\,dx,\\ \text{тому виберемо}\\ u=\ln x \qquad du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=\dfrac{1}{x^3}dx \quad v=\int\dfrac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\dfrac{x^{-2}}{-2}\\ \int u\,dv=uv-\int v\,du\end{array}\right]=\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{x^{-2}}{-2}}_{v}-\int\underbrace{\frac{x^{-2}}{-2}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du}=$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int x^{-3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{x^{-2}}{4}+c=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+c. \blacktriangledown$$

▲ Приклад № 45.

$$\int arcctg\sqrt{x}\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{введемо спочатку нову}\\ \text{змінну } t=\sqrt{x},\text{ тобто}\\ x=t^2,\text{ звідки}\\ dx=2t\,dt\end{array}\right]=\int arcctg\,t\cdot 2t\,dt=$$

$$=2\int t\cdot arcctg\,t\,dt=\left[\begin{array}{cc}u=arcctg\,t & du=-\dfrac{1}{1+t^2}dt\\ \hline dv=t\,dt & v=\dfrac{t^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}arcctg\,t-\int\frac{t^2}{2}\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\right)=t^2arcctg\,t+\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=t^2arcctg\,t+t+arcctg\,t+c=\left|t=\sqrt{x}\right|=\left(arcctg\sqrt{x}\right)(x+1)+\sqrt{x}+c. \blacktriangledown$$

▲ Приклад № 46

$$\int x\cdot 3^x dx=\left[\begin{array}{cc}u=x & du=dx\\ \hline dv=3^x dx & v=\dfrac{3^x}{\ln 3}\end{array}\right]=$$

$$=x\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx=x\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx=\frac{1}{\ln 3}\left(x\cdot 3^x-\frac{3^x}{\ln 3}\right)+c==\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+c. \blacktriangledown$$

▲ Приклад № 47.

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[\begin{array}{cc}u=\arcsin x & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ \hline dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} & v=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}\end{array}\right]=$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin\ x + 2\int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\left(\sqrt{x+1}\arcsin\ x + 2\sqrt{1-x}\right) + c.$$ ▼

▲ **Приклад № 48**.

$$\int x\cdot\cos^2 x dx = \left[\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{f(x)dx = P_1(x)\ \cdot\ \varphi(\cos x)dx \Rightarrow} \\ u = x & du = dx \\ \hline dv = \cos^2 x dx & v = \int \cos^2 x dx = \\ & = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \\ & = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \end{array}\right] =$$

$$= x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin\ 2x\right) - \int\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin\ 2x\right)dx = = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\sin\ 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + c =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin\ 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c.$$ ▼

Приклад № 49.

Знайти $I = \int e^{3x}\cos 4x\,dx.$

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{\cos 4x\,dx}_{dv} = \left[\begin{array}{ll} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 4x\,dx & v = \int \cos 4x\,dx = \\ & = \frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin\ 4x - \int \frac{1}{4}\sin\ 4x\cdot 3e^{3x}dx = \frac{1}{4}e^{3x}\sin\ 4x -$$

$$- \frac{3}{4}\int e^{3x}\sin\ 4x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ \hline dv = \sin\ 4x\,dx & v = \int \sin\ 4x\,dx = \\ & = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin\ 4x - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{3x}\cos 4x + \int \frac{1}{4}\cos 4x\cdot 3e^{3x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin\ 4x + \frac{3}{16}e^{3x}\cos 4x - \frac{9}{16}\int e^{3x}\cos 4x\,dx + c_1.$$

Отже,

$$\underbrace{\int e^{3x}\cos 4x\,dx}_{I}=\frac{1}{4}e^{3x}\left(\sin 4x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)-\frac{9}{16}\underbrace{\int e^{3x}\cos 4x\,dx}_{I}+c_1.$$

В правій частині останнього співвідношення стоїть шуканий інтеграл I. Перенесемо його в ліву частину, маємо

$$I+\frac{9}{16}I=\frac{1}{4}e^{3x}\left(\sin 4x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)+c_1,$$

або

$$\frac{25}{16}I=\frac{1}{4}e^{3x}\left(\sin 4x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)+c_1.$$

Звідки $I=\frac{4}{25}e^{3x}\left(\sin 4x+\frac{3}{4}\cos 4x\right)+c,\quad \left(c=\frac{16}{25}c_1\right).$ ▼

Приклад № 50.

Знайти $I=\int\cos(\ln x)dx.$

▲ $I=\int\cos(\ln x)dx=\begin{bmatrix}u=\cos(\ln x) & du=-\sin(\ln x)\cdot\frac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=$

$$=x\cdot\cos(\ln x)+\int x\cdot\sin(\ln x)\frac{dx}{x}=x\cdot\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=\sin(\ln x) & du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=x\cdot\cos(\ln x)+x\cdot\sin(\ln x)-$$

$$-\int x\cdot\cos(\ln x)\frac{dx}{x}+c_1=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))-I+c_1.$$

Отже, $I=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))-I+c_1;$

звідки $2I=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+c_1,$ а $I=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+c,$ де $c=\frac{1}{2}c_1$. ▼

§ 4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ АЛГЕБРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Як відомо, знайти похідну можна від будь-яких елементарних функцій та від функцій, які є суперпозицією елементарних функцій. Але не кожна функція має інтеграл, який виражається через елементарні функції. Простішим з цих класів функцій є клас раціональних функцій.

Кожну раціональну функцію можна подати у вигляді многочлена або дробово-раціональної функції. Дробово-раціональні функції виражаються алгебричними дробами:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}. \qquad (1.28)$$

Тут $P(x)$– многочлен степеня n, $Q(x)$ – многочлен степеня m; a_i, b_j $\left(i=\overline{0,n};\quad j=\overline{0,m}\right)$ – дійсні числа.

Якщо степінь n многочлена $P(x)$ менший за степінь m многочлена $Q(x)$ $(n<m)$, то дріб (1.28) називають ***правильним***. Якщо $n \geq m$ – дріб (1.28) називають ***неправильним***.

▲ **Приклад № 51.** $R(x)=\dfrac{x^3+1}{x^5+3x^2+2}$ – правильний дріб.

▲ **Приклад № 52**. $R(x)=\dfrac{x^5-2}{x^2+4x+4}$ – неправильний дріб.

Якщо дріб неправильний, то поділивши чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів), можна подати заданий дріб у вигляді суми многочлена і деякого правильного дробу:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{Q(x)}. \qquad (1.29)$$

Тут $M(x)$– многочлен, $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$– правильний дріб.

▲ **Приклад № 53.** Розглянемо попередній приклад. З неправильного дробу виділимо цілу частину і тим самим одержимо правильний дріб. Виконаємо ділення:

x^5-2 | x^2+4x+4

$x^3-4x^2+12x-32$

$-\;-4x^4-4x^3-2$

$-4x^4-16x^3-16x^2$

$-\;12x^3+16x^2-2$

$12x^3+48x^2+48x$

$-\;-32x^2-48x-2$

$-32x^2-128x-128$

$80x+126$

Тоді $\dfrac{x^5-2}{x^2+4x+4}=x^3-4x^2+12x-32+\dfrac{80x+126}{x^2+4x+4}$. ▼

Отже, щоб проінтегрувати неправильний дріб, потрібно подати його у вигляді суми многочлена і правильного дробу, інтегрувати многочлен і правильний дріб. Перейдемо до вивчення правильних дробів.

4.1. Інтегрування правильних раціональних дробів, які містять квадратний тричлен у знаменнику

а). Інтегрування дробу $\frac{1}{a^2+x^2}$*:*

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\begin{bmatrix}\int\frac{du}{u^2+1}=arctg\,u+c,\\ u=\frac{x}{a}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{ad\left(x/a\right)}{\left(x/a\right)^2+1}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x/a\right)}{\left(x/a\right)^2+1}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c.$$

Отже,
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c. \qquad (1.30)$$

▲ Приклад № 54.

$$\int\frac{dx}{x^2+2}=\begin{bmatrix}\text{за формулою (5.30)}\\ \text{при } a^2=2,\quad a=\sqrt{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+c.$$ ▼

б). Інтегрування дробу $\frac{1}{x^2-a^2}$:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c.$$

Отже, маємо
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c. \qquad (1.31)$$

▲ Приклад № 55.

$$\int\frac{dx}{4x^2-7}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{7}{4}}=\begin{bmatrix}\text{за формулою (5.31)}\\ \text{при } a=\frac{\sqrt{7}}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}}\right|+c.$$ ▼

в). Інтегрування дробу $\frac{1}{a^2-x^2}$: $\quad\int\frac{dx}{a^2-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2-a^2}=$

$$= -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{-1}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{-(a-x)}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$$

Маємо
$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c. \qquad (1.32)$$

▲ **Приклад № 56.** $\int\frac{dx}{9-x^2} = -\int\frac{dx}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c.$ ▼

г). Інтегрування дробу $\frac{x}{x^2 \pm a^2}$:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \left[\begin{array}{l}\text{внесемо } x \text{ під знак}\\ \text{диференціала}\end{array}\right] = \int\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2 \pm a^2\right)}{x^2 \pm a^2} = = \left[\int\frac{du}{u}\right] = \frac{1}{2}\ln|\,x^2 \pm a^2\,| + c.$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln|\,x^2 \pm a^2\,| + c. \qquad (1.33)$$

д). Інтегрування дробу $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

Обчислимо $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Розглядаємо випадок, коли квадратний тричлен ax^2+bx+c не має дійсних коренів, тобто $D = b^2 - 4ac < 0$. Виділимо повний квадрат у квадратного тричлена:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = = a\left(\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Оскільки, за умовою, $D < 0$, то $\frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$, тоді

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right), \text{ де } \alpha = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int\frac{dx}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha^2\right)} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha^2} =$$

Отже,

$$= \left[\begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t,\\ x = t - \frac{b}{2a}, \quad dx = dt\end{array}\right] = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+\alpha^2} = [\text{за формулою } (5.30)] =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha}arctg\frac{t}{\alpha} + c = \left[t = x + \frac{b}{2a}\right] = \frac{1}{\alpha a}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{\alpha} + c = = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + c.$$

Таким чином,

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+c. \qquad (1.34)$$

▲ **Приклад № 57.**

$$\int\frac{dx}{2x^2-2x+1}=\begin{bmatrix}2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right)=\\=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dx}{2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\begin{bmatrix}x-\frac{1}{2}=t\\dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\begin{bmatrix}\text{використовуємо}\\\text{інтеграл (5.30)}, a=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/2}arctg\frac{t}{1/2}+c=$$

$$=arctg\,2t+c=\left[t=x-\frac{1}{2}\right]=arctg\,2\left(x-\frac{1}{2}\right)+c=arctg\,(2x-1)+c.$$ ▼

4.2. Інтегрування найпростіших алгебричних дробів

Дроби виду $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, де $A,\ B,\ a,\ p,\ q,\ k\geq 2$ – дійсні числа, називаються найпростішими дробами відповідно I-го – IV-го типу. Розглянемо інтегрування цих дробів.

1. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d\,(x-a)}{x-a}=$$

$$=\left[\int\frac{du}{u}=\ln\,|u|+c\right]=A\ln\,|x-a|+c. \qquad (1.35)$$

▲ **Приклад № 58.** $\int\frac{5dx}{3(x-4)}=\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-4}=\frac{5}{3}\int\frac{d\,(x-4)}{x-4}=\left[\int\frac{du}{u}\right]=\frac{5}{3}\ln\,|x-4|+c.$ ▼

▲ **Приклад № 59.**

$$\int\frac{x^4}{1-x}dx=-\int\frac{(x^4-1)+1}{x-1}dx=-\int\frac{x^4-1}{x-1}dx-\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}dx-\int\frac{d\,(x-1)}{x-1}=-\int\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}dx-\ln|x-1|=$$

$$=-\int(x^3+x^2+x+1)dx-\ln|x-1|=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)-\ln|x-1|+c.$$ ▼

2. Дріб $\frac{A}{(x-a)^k}$, при $k \ge 2$, $A = const$, $a = const$ називають ***найпростішим дробом II-го типу***.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k} dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left[\int u^{-k} du\right] = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + c.$$

Отже,
$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + c. \qquad (1.36)$$

▲ Приклад № 60. $\int \frac{dx}{(x+2)^3} = \int (x+2)^{-3} dx = \int (x+2)^{-3} d(x+2) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + c.$ ▼

3. Дріб $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ називають ***найпростішим дробом III-го типу.***

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \left[\begin{array}{l} \textit{в чисельнику утворюємо} \\ \textit{диференціал від } ax^2+bx+c: \\ d\left(ax^2+bx+c\right) = (2ax+b)dx \end{array}\right] = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + B - \frac{Ab}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = [\text{за формулою } (5.34)] =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + c. \qquad (1.37)$$

▲ Приклад № 61.

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx = \left[d\left(x^2+4x+5\right) = (2x+4)dx\right] =$$

$$= \int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} = \left[\begin{array}{l} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ u > 0 \quad (D < 0) \end{array}\right] = \ln\left(x^2+4x+5\right) + c.$$

▼

▲ Приклад № 62

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3} dx = \left[\begin{array}{l} \textit{оскільки } d\left(x^2+2x+3\right) = (2x+2)dx, \\ \textit{то } (3x+1)dx = \left(\frac{3}{2}(2x+2) - 2\right)dx \end{array}\right] =$$

.

$$=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+3}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-2\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+3\right)}{x^2+2x+3}-$$

$$-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)+2}=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\left[\int\frac{du}{u^2+a^2}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\sqrt{2}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c.\ \blacktriangledown$$

Зауваження. При інтегруванні правильних раціональних дробів III-го типу у випадку, коли знаменник квадратного тричлена ax^2+bx+c має дійсні корені $(D>0)$, підінтегральну функцію розкладають на найпростіші дроби I-го типу (розглянемо цей випадок в п.4.3.), або інтегрують виділенням повного квадрата у знаменнику дробу.

4. Інтегрування ***найпростіших дробів IV-го типу***:

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{A}{2(1-k)}\left(x^2+px+q\right)^{1-k}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

Позначимо

$$I_k=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}=$$

$$=\left[x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt;\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2,\ \text{оскільки}\quad \frac{p^2}{4}-q<0\right]=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt.$$

Обчислимо

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\int\frac{t\cdot t\cdot dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\begin{bmatrix}u=t & du=dt\\ dv=\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k} & v=\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k}-\int\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k}dt\right)=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right).$$

Підставимо в I_k, знайдемо:

$$I_k=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{2(k-1)}t\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2(k-1)}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2a^2(k-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}=\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}+$$

$\dfrac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}$, де $I_{k-1}=\int\dfrac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}$ знаходиться аналогічно як і I_k.

Послідовно обчислюючи інтеграли I_{k-1}, I_{k-2}, I_{k-3}, тощо, дістанемо

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+c.$$

Слід зазначити, що таким способом, який наведено вище, можна обчислити також інтеграли виду

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\quad\int\frac{Mx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Приклад № 63. Знайти $\displaystyle\int\frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

▲ $$\int\frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx=\left[d\left(x^2-5x+1\right)=(2x-5)dx\right]=\int\frac{\frac{7}{2}(2x-5)+\frac{31}{2}}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx=$$

$$=\frac{7}{2}\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx+\frac{31}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+1}}=\frac{7}{2}\int\frac{d\left(x^2-5x+1\right)}{\sqrt{x^2-5x+1}}+\frac{31}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}\right)-\frac{21}{4}}}=$$

$$=\frac{7}{2}\cdot2\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{31}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}==7\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{31}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+c.$$ ▼

4.3. Інтегрування раціональних дробів $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, які розкладаються на найпростіші

Алгоритм методу інтегрування раціональних функцій:

1) розкласти раціональну функцію на найпростіші дроби;

2) проінтегрувати найпростіші дроби.

Розв’язання першої задачі сформулюємо у вигляді правил (без доведення).

Нехай многочлен $P(x)$ має степінь n, а многочлен $Q(x)$ – степінь m, причому $n<m$.

Нехай також $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами і, крім того, коефіцієнт многочлена $Q(x)$ при x^m дорівнює 1 (якщо він не дорівнює 1, то цього можна досягти діленням на коефіцієнт при x^m одночасно $P(x)$ та $Q(x)$).

◐ **Правило 1** (розкладання правильного дробу на найпростіші дроби І-го типу).

Якщо знаменник $Q(x)=Q_m(x)$ правильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ має дійсні різні корені $x_1, x_2, \dots, x_m$, тому за формулою (3.20) він розкладається на лінійні множники

$$Q_m(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

і тоді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)}=$$
$$=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{K}{x-x_m}, \qquad (1.38)$$

де $A,\ B, \dots,\ K$ – сталі коефіцієнти.

Сталі коефіцієнти обчислюються методом невизначених коефіцієнтів, або за методом завдання початкових значень $x=x_1,\ x=x_2,\ \dots,\ x=x_m,$ які розглянемо пізніше на прикладах.

▲ **Приклад № 64**. Дріб $\frac{x+3}{x^3-x^2-2x}$ – правильний.

$$\frac{x+3}{x^3-x^2-2x}=\frac{x+3}{x\left(x^2-x-2\right)}.$$

Розкладемо x^2-x-2 на множники. Обчислимо дискримінант D: $D=1+8=9$, тоді $x_1=\frac{1+3}{2}=2,\ x_2=\frac{1-3}{2}=-1$, тому $x^2-x-2=(x-2)\cdot(x+1)$. Отже, дріб запишеться у вигляді

$\frac{x+3}{x^3-x^2-2x}=\frac{x+3}{x\left(x^2-x-2\right)}=\frac{x+3}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$, де $A,\ B$ і C – невідомі коефіцієнти. ▼

◐ **Правило 2** (розкладання правильного дробу на найпростіші дроби І-го і ІІ-го типу).

Якщо знаменник $Q_m(x)$ дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ має дійсні корені, серед яких є кратні, тобто $Q_m(x)$ можна розкласти на множники вигляду (за теоремою 3, § 4, розділ ІІІ**)**

$$Q_m(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k},$$

де $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=m, k<m\,(k=m$ при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=1)$,

тоді $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}}=\dfrac{A_1}{x-x_1}+$

$$+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\frac{B_1}{(x-x_2)}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots++\frac{B_{\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{C_1}{x-x_k}+\frac{C_2}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{C_{\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}.$$

Коефіцієнти $A_i, B_j, \ldots, C_l\ \left(i=\overline{1,\alpha_1};\ j=\overline{1,\alpha_2};\ \ldots;\ l=\overline{1,\alpha_k}\right)$

знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

▲ **Приклад № 65**. Розглянемо дріб $\dfrac{1}{x^2\left(1-x^2\right)}$.

Використовуючи правило 2, запишемо

$$\frac{1}{x^2\left(1-x^2\right)}=\frac{1}{x^2(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{x^2(x-1)(1+x)}=-\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}\right),$$

A, B, C, D – невідомі коефіцієнти. ▼

◐ **Правило 3**. Якщо знаменник $Q_m(x)$ дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ має дійсні і комплексні корені (або тільки комплексні), то, за теоремою 2 (розділ III, §4), його можна розкласти на множники

$$Q_m(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_kx+q_k\right),\quad m=2k,$$

тоді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{x^2+p_kx+q_k}.$$

▲ **Приклад № 66.** Дріб $\dfrac{4+x}{x^4-1}$ можна записати так:

$$\frac{4+x}{x^4-1}=\frac{4+x}{(x^2)^2-1^2}=\frac{4+x}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{4+x}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}.$$

Тут знаменник дробу розкладений на лінійні множники та множники з квадратних тричленів, тому скориставшись правилом 3, дріб можемо записати так:

$$\frac{4+x}{x^4-1}=\frac{4+x}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

де A, B, C, D – невідомі коефіцієнти. ▼

Для знаходження коефіцієнтів будемо використовувати метод невизначених коефіцієнтів, або метод завдання початкових значень: $x=x_1,\ x=x_2$,

тощо. Покажемо зміст цих методів на прикладах.

Приклад № 67. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)} = I$.

▲ 1). Дріб $\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$ – правильний.

2). Знаменник дробу розкладений на лінійні множники. Перепишемо його так:

$$(x+1)(2x-3) = 2(x+1)(x-1{,}5).$$

Тоді дріб розкладається, за правилом I, на суму правильних дробів I-го типу.

$$\frac{1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{1}{2(x+1)(x-1{,}5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1{,}5}\right).$$

Щоб знайти коефіцієнти A і B, зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{2(x+1)} + \frac{B}{2(x-1{,}5)} = \frac{A(x-1{,}5)+B(x+1)}{2(x+1)(x-1{,}5)} = \frac{(A+B)x+(B-1{,}5A)}{(x+1)(2x-3)}.$$

Відкидаємо в лівій і правій частинах цієї рівності спільний знаменник, дістанемо

$$1 = (A+B)x + (B-1{,}5A).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B-1{,}5A=1, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знайдемо

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -1{,}5A+B=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A, \\ -2{,}5A=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{5}=-0{,}4, \\ B=\frac{2}{5}=0{,}4. \end{cases}$$

Тоді задана підінтегральна функція виражається через найпростіші дроби так:

$$\frac{1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}4}{x+1} + \frac{0{,}4}{x-1{,}5}\right).$$

Обчислюємо інтеграл

$$I = \int \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}4}{x+1} + \frac{0{,}4}{x-1{,}5}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot 0{,}4\left(-\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dx}{x-1{,}5}\right) =$$

$$= 0{,}2\left(\int\frac{d(x-1{,}5)}{x-1{,}5} - \int\frac{d(x+1)}{x+1}\right) = 0{,}2(\ln|x-1{,}5| - \ln|x+1|) + c = = 0{,}2\ln\left|\frac{x-1{,}5}{x+1}\right| + c.$$ ▼

Все, що було вище сказано в п.4.1–4.3, можна сформулювати у вигляді основних правил інтегрування раціональних дробів:

1. Якщо дріб неправильний, то потрібно чисельник дробу поділити на знаменник цього дробу, потім дріб подати у вигляді суми многочлена (частка від ділення чисельника на знаменник) і правильного дробу:

$$\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)}}_{\substack{\text{неправильний}\\ \text{дріб}}} = \underbrace{M(x)}_{\text{многочлен}} + \underbrace{\frac{F(x)}{Q(x)}}_{\substack{\text{правильний}\\ \text{дріб}}}.$$

Інтегрування неправильного раціонального дробу тоді зведеться до інтегрування многочлена і правильного раціонального дробу.

2. Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, його розкладають на множники (лінійні, квадратичні).

3. Правильний раціональний дріб розкладають на суму найпростіших дробів І-го – IV-го типу. Інтегрування правильних дробів зводиться до інтегрування найпростіших дробів.

Приклад № 68. Знайти $\int \frac{x^3+2x}{x^2-x-6}dx = I.$

▲ Маємо $\frac{x^3+2x}{x^2-x-6}$ – неправильний дріб. Поділимо чисельник на знаменник, виділивши многочлен і правильний дріб. Виконаємо ділення:

x^3+2x | x^2-x-6

$-\ x^3-x^2-6x$ | $x+1$ частка

$-\ x^2+8x$

x^2-x-6

$9x+6$ остача

Тоді $$\frac{x^3+2x}{x^2-x-6} = x+1+\frac{9x+6}{x^2-x-6}.$$

Обчислюємо інтеграл I:

$$I = \int\left(x+1+\frac{9x+6}{x^2-x-6}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\int\frac{9x+6}{x^2-x-6}dx.$$

Інтеграл $\int\frac{9x+6}{x^2-x-6}dx$ можна обчислити двома способами:

1) як найпростіші дроби III-го типу.
2) розкладаючи на найпростіші дроби І-го типу.

Розкладемо дріб $\frac{9x+6}{x^2-x-6}$ на найпростіші дроби. Оскільки знаменник дробу x^2-x-6 має дійсні корені (їх легко знайти за теоремою Вієта): $x_1=3,\ x_2=-2$, то дріб розкладається на найпростіші дроби І-го типу:

$$\frac{9x+6}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3},$$

де A і B – невідомі коефіцієнти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{9x+6}{x^2-x-6} = \frac{{}^{x-3}A}{x+2}+\frac{B^{x+2}}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{x^2-x-6} = \frac{(A+B)x+2B-3A}{x^2-x-6}.$$

Звідси дістаємо тотожність для визначення невідомих коефіцієнтів розкладу A і B :

$$9x+6 = (A+B)x+2B-3A$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$\begin{matrix} x: \\ x^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 9 = A + B, \\ 6 = 2B - 3A \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему:

$$\begin{cases} A + B = 9, \\ -3A + 2B = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 9 - B, \\ -3(9 - B) + 2B = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27 + 5B = 6, \\ A = 9 - B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 6{,}6, \\ A = 2{,}4. \end{cases}$$

Тоді задана підінтегральна функція виражається через найпростіші дроби

$$\frac{9x+6}{x^2-x-6} = \frac{2{,}4}{x+2} + \frac{6{,}6}{x-3}.$$

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2-x-6}dx = \int\left(x+1+\frac{9x+6}{x^2-x-6}\right)dx =$$

Отже, $= \int x\,dx + \int dx + \int \frac{9x+6}{x^2-x-6}dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2{,}4}{x+2}dx +$

$+ \int \frac{6{,}6}{x-3}dx = \frac{x^2}{2} + x + 2{,}4\ln|x+2| + 6{,}6\ln|x-3| + c.$ ▼

<u>Зауваження</u>. Якщо корені знаменника - дійсні різні, то доцільніше визначати невідомі коефіцієнти A, B методом завдання початкових значень: $x = x_1,\ x = x_2$, тощо.

Приклад № 69. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

▲ $$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

де A, B, C - невідомі коефіцієнти. Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} =$$
$$= \frac{A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)},$$

звідси $1 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2).$

Покладемо $x = 1:\ 1 = -6A,$ знайдемо $A = -\frac{1}{6};$

якщо $x = -2;\ 1 = 15B,\ B = \frac{1}{15};$ при $x = 3:\ 1 = 10C$, звідки $C = \frac{1}{10}.$

Тоді $\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{15}}{x+2} + \frac{\frac{1}{10}}{x-3},$

а $I = -\frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{15}\ln|x+2| + \frac{1}{10}\ln|x-3| + c.$ ▼

Приклад № 70. Знайти $\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

▲ Дріб $\frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ – правильний. Розкладемо його на найпростіші дроби:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

де A, B, C, D – невідомі коефіцієнти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx^2 + Cx + Dx^2 + 2Dx + D}{(x+1)^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+D+2C)x^2 + (A+2D+C)x + (A+B+D)}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Звідси маємо

$$x-1 = (A+C)x^3 + (A+B+D+2C)x^2 + (A+2D+C)x + (A+B+D).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо:

$$\begin{array}{r} x^3: \\ x^2: \\ x: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 0 = A + C, \\ 0 = A + B + D + 2C, \\ 1 = A + 2D + C, \\ -1 = A + B + D. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, знайдемо

$$A = -\tfrac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \tfrac{1}{2}, \quad D = \tfrac{1}{2}.$$

Тоді

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{-\tfrac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Отже,

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2}arctg x = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}arctg\, x + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}arctg\, x + c.$$

▼

Приклад № 71. Знайти

$$\int \frac{x^3+2x^2-3x-6}{(x-3)(x^2+2x+6)}dx$$

▲ Дріб $\dfrac{x^3+2x^2-3x-6}{(x-3)(x^2+2x+6)}$ - неправильний.

Виконаємо ділення «кутом», розкриваючи спочатку у знаменнику дужки:

$(x-3)(x^2+2x+6) = x^3+2x^2+6x-3x^2-6x-18 = x^3-x^2-18$;

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3x-6 & x^3-x^2-18 \\ -\; x^3-x^2-18 & 1 \\ \hline 3x^2-3x+12 & \end{array}$$

Тоді $\dfrac{x^3+2x^2-3x-6}{(x-3)(x^2+2x+6)} = 1+\dfrac{3(x^2-x+4)}{(x-3)(x^2+2x+6)}$.

Розкладемо правильний дріб $\dfrac{x^2-x+4}{(x-3)(x^2+2x+6)}$ на елементарні дроби I-го та III-го типу:

$$\frac{x^2-x+4}{(x-3)(x^2+2x+6)} = \frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+6} = \frac{Ax^2+2Ax+6A+Bx^2+Cx-3Bx-3C}{(x-3)(x^2+2x+6)};$$

звідси $x^2-x+4 = (A+B)x^2+(2A+C-3B)x+6A-3C.$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x в лівій і правій частинах останньої рівності, дістанемо

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A+B=1, \\ 2A+C-3B=-1, \\ 6A-3C=4 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1-A, \\ C=\dfrac{6A-4}{3}=2A-\dfrac{4}{3}, \\ 2A+2A-\dfrac{4}{3}-3(1-A)=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} B=1-A, \\ C=2A-\dfrac{4}{3}, \\ 7A=\dfrac{10}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} A=\dfrac{10}{21}, \\ B=\dfrac{11}{21}, \\ C=\dfrac{20}{21}-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{8}{21}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{x^2-x+4}{(x-3)(x^2+2x+6)} = \dfrac{\frac{10}{21}}{x-3}+\dfrac{\frac{11}{21}x-\frac{8}{21}}{x^2+2x+6}$.

Тоді $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-3x-6}{(x-3)(x^2+2x+6)}dx = x+3\left(\int \frac{10/21}{x-3}dx+\frac{1}{21}\int \frac{11x-8}{x^2+2x+6}dx\right) =$

$\left| d(x^2+2x+6) = (2x+2)dx \right| =$

$$= x+3\cdot\frac{10}{21}\ln|x-3|+3\cdot\frac{1}{21}\int \frac{\frac{11}{2}(2x+2)-19}{x^2+2x+6}dx = x+\frac{10}{7}\ln|x-3|+$$

$$+\frac{1}{7}\left(\frac{11}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+6}-19\int\frac{dx}{x^2+2x+6}\right)=x+\frac{10}{7}\ln|x-3|+\frac{11}{14}\int\frac{d\left(x^2+2x+6\right)}{x^2+2x+6}-$$

$$-\frac{19}{7}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+5}=x+\frac{10}{7}\ln|x-3|+\frac{11}{14}\ln\left(x^2+2x+6\right)-\frac{19}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C\ \blacktriangledown$$

§ 5. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{1.39}$$

Для обчислення таких інтегралів існує універсальна тригонометрична підстановка

$$t=tg\frac{x}{2}. \tag{1.40}$$

Виразимо $\sin x, \cos x$ через $tg\frac{x}{2}$ тобто через t, а dx через t і dt :

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\left[:\cos^2\frac{x}{2}\right]=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\left[:\cos^2\frac{x}{2}\right]=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Із рівності $t=tg\frac{x}{2}$, маємо $\frac{x}{2}=arctg\,t$, звідки $x=2arctg\,t$, тоді $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Отже

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \tag{1.41}$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{1.42}$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{1.43}$$

Підставимо (5.40) – (5.43) в (5.39), знайдемо

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Підінтегральна функція раціональна відносно t.

▲ **Приклад № 72.**

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \begin{bmatrix} t = tg\frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{2dt}{\left(1-t^2\right)\left(3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\frac{3\left(1+t^2\right)+5\left(1-t^2\right)}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3+3t^2+5-5t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \left[\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c = \left[t = tg\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + c.$$

▼

За допомогою **універсальної підстановки (1.40)-(1.43)** можна обчислити інтеграли від виразів, які раціонально залежать від тригонометричних функцій. Але саме тому, що універсальна тригонометрична підстановка є загальним для всіх виразів від тригонометричних функцій, вона часто приводить до складних виразів. Тому розглянемо окремі підстановки, які в деяких частинних випадках зручніші, ніж універсальна тригонометрична підстановка.

◐ 1. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ така, що

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x), \tag{1.44}$$

то застосовується підстановка

$$t = \cos x. \tag{1.45}$$

Звідси $x = \arccos t$, тоді $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, і

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = -\int R\left(\sqrt{1-t^2}, t\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Приклад № 73. Обчислити $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

▲ Тут $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos^2 x}$, причому

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(-\sin x)\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin x \cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

тому застосовуємо підстановку (5.45):

$$\int \frac{dx}{\sin x, \cos x} = \begin{bmatrix} t = \cos x, \quad x = \arccos t, \\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-t^2}\, t^2 \sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} = \int \frac{dt}{t^2\left(t^2-1\right)}\int \frac{dt}{t^2(t-1)(t+1)}.$$

Дріб $\frac{1}{t^2(t-1)(t+1)}$ – правильний і його можна розкласти на дроби I-го та II-го типу:

$$\frac{1}{t^2(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}=$$
$$=\frac{At(t^2-1)+B(t^2-1)+Ct(t+1)+Dt(t-1)}{t^2(t-1)(t+1)};\quad 1=At^2-At+Bt^2-B+Ct^2+Ct^3+Dt^3-Dt^2,$$
$$1=(A+C+D)t^3+(B+C-D)t^2-At-B.$$

$$\begin{array}{l} t^3: \\ t^2: \\ t\ : \\ t^0: \end{array}\begin{cases}0=A+C+D,\\ 0=B+C-D,\\ 0=-A,\\ 1=-B,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0,\\ B=-1,\\ C+D=0,\\ C-D=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0,\\ B=-1,\\ 2C=1,\\ D=-C,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$A=0;\quad B=-1;\quad C=0{,}5;\quad D=-0{,}5.$

$$\frac{1}{t^2(t-1)(t+1)}=-\frac{1}{t}+\frac{0{,}5}{t-1}-\frac{0{,}5}{t+1}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{dt}{t^2(t-1)(t+1)}=\int\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{0{,}5}{t-1}-\frac{0{,}5}{t+1}\right)dt=$$

$$=-\int t^{-2}dt+0{,}5\int\frac{d(t-1)}{t-1}-0{,}5\int\frac{d(t-1)}{t+1}=$$
$$=-\frac{t^{-1}}{-1}+0{,}5\ln|t-1|-0{,}5\ln|t+1|+c=$$
$$=[t=\cos x]=\frac{1}{\cos x}+\ln\sqrt{\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|}+c=\frac{1}{\cos x}+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.\quad\blacktriangledown$$

◐ 2. Якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ така, що

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),\tag{1.46}$$

то підстановка –

$$t=\sin x.\tag{1.47}$$

З (5.47) маємо $x=\arcsin t$, звідки $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, тоді

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Приклад № 74. Обчислити $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx=I.$

▲ Оскільки $R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$, причому $R(\sin x, -\cos x) = \frac{(\cos x)^3}{\sin^2 x} =$ $-\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$, то застосовуємо підстановку $t = \sin x$, звідки $x = \arcsin t$, а $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Тоді $I = \int \frac{\sqrt{(1-t^2)^3}}{t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$= \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \int (t^{-2} - 1) dt = \int t^{-2} dt - \int dt = \frac{t^{-1}}{-1} - t + c =$

$= -\frac{1}{t} - t + c = [t = \sin x] = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c.$ ▼

◐ 3. Нехай тепер $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє умову

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x). \tag{1.48}$$

У цьому випадку раціональніше зробити підстановку

$$t = tg\, x. \tag{1.49}$$

З (5.49) знаходимо $x = arctg\, t$, тоді

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt,$$

а

$$\sin x = \frac{tg\, x}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Отже, $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right) \frac{1}{1+t^2} dt.$

Приклад № 75. Обчислити $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = I.$

▲ Оскільки $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin^3 x}$,

$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)(-\sin x)^3} = = \frac{1}{\cos x \sin^3 x} = R(\sin x, \cos x),$

тому застосовуємо підстановку $t = tg\, x$, звідки $x = arctg\, t$, а $dx = \frac{dt}{1+t^2} dt.$ Тоді

$I = \int \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{1}{t} dt =$

$= \frac{t^{-2}}{-2} + \ln |t| + c = [t = td\, x] = -\frac{1}{2tg^2 x} + \ln |tg\, x| + c.$ ▼

◐ 4. Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int \sin^{2n} x\,dx \quad \text{і} \quad \int \cos^{2n} x\,dx. \tag{1.50}$$

Ці інтеграли обчислюються за допомогою формул зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{1.51}$$

▲ Приклад № 76.

$$\int \sin^4 x\,dx = \left[\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2x}{2}\right] =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 4x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c = = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c. \ ▼$$

◐ 5. Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cdot \sin nx\,dx,$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx,$$

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx \tag{1.52}$$

обчислюються за допомогою наступних формул

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \tag{1.53}$$

▲ Приклад № 77.

$$\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \\ +\sin(\alpha+\beta)), \quad \alpha = \frac{x}{3}, \\ \beta = \frac{2x}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{2x}{3}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\left(-\frac{x}{3}\right) + \sin x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \sin\frac{x}{3}dx + \int \sin x\,dx\right) = -\frac{1}{2}\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\cdot 3d\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\cos x\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\cos\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos x + c = \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + c. \ ▼$$

◐ 6. Інтеграли вигляду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx.$$

Можливі випадки:

а) якщо m - непарне ціле додатнє число: $m = 2p + 1$, тоді потрібно відокремити $\sin x$ в першому степені, а підінтегральний вираз перетворити так:

$$\sin^{2p+1} x \cdot \cos^n x dx = \sin^{2p} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx =$$

$$= -\left(\sin^2 x\right)^p \cdot \cos^n x \cdot d\left(\cos x\right) = -\left(1 - \cos^2 x\right)^p \cdot \cos^n x \cdot d\left(\cos x\right);$$

потім застосовуємо підстановку $t = \cos x$.

▲ **Приклад № 78.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} \cdot \sin x dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = \cos x & \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \\ dt = -\sin x dx, & \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{1 - t^2}{t^8} dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^8} + \int \frac{dt}{t^6} = -\int t^{-8} dt + \int t^{-6} dt = -\frac{t^{-7}}{-7} + \frac{t^{-5}}{-5} + c =$$

$$= \frac{1}{7t^7} - \frac{1}{5t^5} + c = \left[t = \cos x\right] = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + c. \quad ▼$$

б) Якщо n - непарне ціле додатнє число: $n = 2k + 1$, тоді виконуємо перетворення:

$$\sin^m x \cdot \cos^{2k+1} x dx = \sin^m x \cdot \cos^{2k} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \sin^m x \cdot \left(\cos^2 x\right)^k \cdot d\left(\sin x\right) = \sin^m x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cdot d\left(\sin x\right)$$ і застосуємо підстановку $t = \sin x$.

▲ **Приклад № 79.** $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx =$

$$= \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) =$$

$$= \left[\sin x = t\right] = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c. \quad ▼$$

в) Якщо m і n - парні невід'ємні числа, тоді застосовуємо формули зниження степеня (5.51).

▲ **Приклад № 80.** $\int \cos^2 4x \cdot \sin^2 4x dx =$

$$= \int \frac{1 + \cos 8x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 8x}{2} dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos^2 8x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int \cos^2 8x dx\right) = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 16x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{16} \sin 16x\right) + c = \frac{1}{8} x - \frac{\sin 16x}{128} + c. \quad ▼$$

г) Якщо $m + n = -2k \quad \left(k > 0,\ k \in Z\right)$, тобто $m + n$ - ціле парне від'ємне число, тоді застосовуємо підстановку $tgx = t$, або $ctgx = t$.

▲ **Приклад № 81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}} = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{\sin x \cos x}} =$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x \sqrt{\sin x \cos x}} = \left| \begin{array}{ll} t = ctgx, & \frac{\sin x}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \sqrt{tgx} \\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}, & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + c = -2\sqrt{ctgx} + c.$$ ▼

д) Якщо $m + n = -(2k+1)$, де $k > 0,\ k \in Z$, тоді використовуючи тотожність $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, застосовуємо інтегрування частинами.

▲ **Приклад № 82.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x} dx =$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x, & du = \cos x\, dx \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx, & v = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \\ & = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \int \frac{1}{2\cos^2 x} \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + c.$$ ▼

▲ **Приклад № 83.**

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx = \int \sin^4 x \sqrt[3]{\cos x}\, \sin x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos x = t^2, \\ d(\cos x) = d(t^3), \\ -\sin x dx = 3t^2 dt, \\ \sin x dx = -3t^2 dt \\ \sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = \\ = (1 - t^6)^2 \end{array} \right] = \int (1 - t^6)^2 \cdot t \cdot (-3t^2) dt =$$

$$= -3\int (1 - 2t^6 + t^{12}) t^3 dt = -3\int (t^3 - 2t^9 + t^{15}) dt =$$

$$= -3\left(\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^{16}}{16}\right) + c = -\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{5}t^{10} - \frac{3}{16}t^{10} - \frac{3}{16}t^{16} + c =$$

$$= \left[t = \sqrt[3]{\cos x}\right] = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + c =$$

$$= -3\sqrt[3]{\cos^4 x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\cos^2 x + \frac{1}{16}\cos^4 x\right) + c. \quad \blacktriangledown$$

§ 6. ІНТЕГРУВАННЯ ПРОСТІШИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Розглянемо деякі типові ірраціональні функції. Інтеграли від них є елементарними функціями. При інтегруванні ірраціональних функцій основним є метод раціоналізації, суть якого полягає у знаходженні такої заміни змінної інтегрування, при якій підінтегральну функцію вдається перетворити до раціонального виду. Для позначення раціональних функцій будемо використовувати букву R (наприклад, $R(x)$).

◐ 1. Розглянемо

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{l}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx. \tag{1.54}$$

Нехай k – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m}{n}, \frac{p}{l}, \ldots, \frac{r}{s}$: $k = HCK\{n; l; \ldots; s\}$.

Застосуємо підстановку

$$x = t^k, \tag{1.55}$$

$$dx = kt^{k-1}dt. \tag{1.56}$$

Підставляємо (1.55), (1.56) в (1.54), маємо інтеграл від раціональної функції від t.

Приклад № 84. Обчислити $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}dx.$

▲ Тут $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = R \cdot \left(x^{1/2}, x^{1/3}\right)$. Тому вводимо нову змінну за формулою $x = t^6$, де $6 = HCK\{$ знаменників дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}\} = HCK\{2; 3\} = 6$.

Тоді $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{array}\right] =$

$$= \int \frac{t^3 \cdot 6t^5}{t^3 - t^2}dt = 6\int \frac{t^8}{t^2(t-1)}dt = 6\int \frac{t^6}{t-1}dt = 6\int \frac{(t^6 - 1) + 1}{t-1}dt = 6\int \frac{1}{t-1}dt +$$

$$+ 6\int \frac{(t^3)^2 - 1^2}{t-1}dt = 6\ln|t-1| + 6\int \frac{(t^3-1)(t^3+1)}{t-1}dt = 6\ln|t-1| +$$

$$+6\int \frac{(t-1)(t^2+t+1)(t^3+1)}{t-1}dt = 6\ln|t-1| + 6\int (t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)dt =$$

$$= 6\ln|t-1| + 6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)+c =$$

$$= 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + x + 1{,}2\sqrt[6]{x^5} + 1{,}5\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + c. \ \blacktriangledown$$

▲

Приклад № 85.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx = \left[\begin{array}{l} R\left(x^{1/2}, x^{2/3}, x^{1/4};\right) \\ x=t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array}\right] = \int \frac{t^6}{t^8-t^3}\cdot 12t^{11}dt =$$

$$= 12\int\frac{t^{17}}{t^3(t^5-1)}dt = 12\int \frac{t^{14}}{t^5-1}dt = \left[\begin{array}{ll} t^{14} & t^5-1 \\ t^{14}-t^9 & t^9+t^4 \\ t^9 & \\ t^9-t^4 & \\ t^4 & \end{array}\right] =$$

$$= 12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt = 12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\int\frac{d(t^5-1)}{5(t^5-1)}\right) =$$

$$= 1{,}2t^{10}+2{,}4t^5+2{,}4\ln|t^5-1|+c = \left[t=\sqrt[12]{x}\right] = 1{,}2\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}\right)+2{,}4\ln|\sqrt[12]{x^5}-1| +$$
$$+ c. \ \blacktriangledown$$

◐ 2. Розглянемо

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+p}\right)^m}, \dots, \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+p}\right)^r}\right)dx =$$
$$= \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+p}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+p}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx. \qquad (1.57)$$

Застосовуємо підстановку

$$\frac{ax+b}{cx+p}=t^k, \quad \text{де} \quad k = НСК\{n; \dots, s\}. \qquad (1.58)$$

З маємо $ax+b=t^k(cx+p),\ ax+b=cxt^k+pt^k,\ ax-cxt^k=pt^k-b,\ x(a-ct^k)=pt^k-b$, звідки

$$x=\frac{pt^k-b}{a-ct^k}. \tag{1.59}$$

Знайдемо dx:

$$dx=\left(\frac{pt^k-b}{a-ct^k}\right)'dt=\frac{pkt^{k-1}(a-ct^k)-(pt^k-b)(-ckt^{k-1})}{(a-ct^k)^2}dt=$$

$$=\frac{pakt^{k-1}-pckt^{2k-1}+pckt^{2k-1}-bckt^{k-1}}{(a-ct^k)^2}dt=\frac{pa-bc}{(a-ct^k)^2}kt^{k-1}dt.$$

Отже,

$$dx=\frac{pa-bc}{(a-ct^k)^2}kt^{k-1}dt. \tag{1.60}$$

Інтеграл (1.57) підстановкою (1.58)–(1.60) зводиться до інтеграла від раціональної функції.

▲ **Приклад № 86**.

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\left[\begin{array}{l}R\left(x,(x+1)^{1/2},(x+1)^{1/3}\right)\\ k=HCK\{2;3\}=6,\\ x+1=t^6,\ x=t^6-1,\\ \Rightarrow dx=6t^5dt\end{array}\right]=\int\frac{(t^6-1)6t^5dt}{t^3+t^2}=$$

$$=6\int\frac{t^5(t^6-1)}{t^2(t+1)}dt=6\int\frac{t^3(t^3-1)(t^3+1)}{t+1}dt=6\int\frac{t^3(t^3-1)(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt=$$

$$=6\int(t^6-t^3)(t^2-t+1)dt=6\int(t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+c=\left[t=\sqrt[6]{x+1}\right]=\frac{2}{3}\sqrt[6]{(x+1)^9}-$$

$$-\frac{3}{4}\sqrt[6]{(x+1)^8}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{6}{4}\sqrt[6]{(x+1)^4}+c=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-x-1+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+c.$$ ▼

◐ 3.

$$\int R\left(x;\sqrt[n]{f(x)}\right)dx. \tag{1.61}$$

В цьому випадку виконуємо підстановку

$$f(x)=t^n, \tag{1.62}$$

звідки $x=\varphi(t)$, а $dx=\varphi'(t)dt$. Тут $t=\sqrt[n]{f(x)}$.

▲ **Приклад № 87.**

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{e^x+1} = t, \ \ e^x+1 = t^4 \\ d(e^x+1) = d(t^4), \\ e^x dx = 4t^3 dt, \ \ e^x = t^4 - 1 \end{bmatrix} = \int \frac{(t^4-1)4t^3 dt}{t} =$$

$$= 4\int t^2(t^4-1)dt = 4\int (t^6 - t^2)dt = 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3}\right) + c =$$

$$= \left[t = \sqrt[4]{e^x+1}\right] = \frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + c.$$ ▼

▲ **Приклад № 88.**

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = \begin{bmatrix} \sqrt{1+\ln x} = t, \quad 1+\ln x = t^2, \\ d(1+\ln x) = d(t^2), \\ \frac{1}{x}dx = 2t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{t^2-1} = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= 2t + 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2t + 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \left[t = \sqrt{1+\ln x}\right] =$$

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x} - 1}{\sqrt{1+\ln x} + 1}\right| + c.$$ ▼

◐ 4. $$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx. \tag{1.63}$$

Підстановка
$$x = a\sin t \qquad (x = a\cos t),$$
$$dx = a\cos t\,dt \quad (dx = -a\sin t\,dt). \tag{1.64}$$

▲ **Приклад № 89.**

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\ 2\cos t\,dt = 8\int \sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot \cos t\,dt =$$

$$= 16\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int (2\sin t\cos t)^2 dt = 4\int \sin^2 2t\,dt = 4\int (\sin 2t)^2 dt =$$

$$= \left[\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2}\right] = 4\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2\int (1 - \cos 4t)dt = 2\left(t - \int \cos 4t\,dt\right) = 2t - 2\cdot\frac{1}{4}\sin 4t + c =$$

$$= \begin{bmatrix} x = 2\sin t \Rightarrow \frac{x}{2} = \sin t, \\ t = \arcsin\frac{x}{2} \end{bmatrix} = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + c = 2\arcsin\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)+c=\begin{bmatrix}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \alpha=2\arcsin\frac{x}{2}\end{bmatrix}=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$-2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\arcsin\frac{x}{2}-\sin^2\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\sin\arcsin\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(1-2\left(\sin\arcsin\frac{x}{2}\right)^2\right)+c=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)+c=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$-x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+c==2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)+c=$$

$$=\frac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+c.$$ ▼

◐ 5. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx. \qquad (1.65)$$

Підстановка $x=a\,tg\,t,\ dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$ перетворює інтеграл (1.65) від ірраціональної функції в інтеграл від раціональної функції:

$$\int R\left(a\,tg\,t,\quad\sqrt{a^2tg^2t+a^2}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt=\int R\left(a\,tg\,t,\quad\frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

▲ **Приклад № 90**.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\left[x=tg\,t,\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\right]=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot tg\,t\,\sqrt{1+tg^2t}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}dt+\int\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l} d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt,\\ \Rightarrow \sin\frac{t}{2}dt=-2d\left(\cos\frac{t}{2}\right);\\ d\left(\sin\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}dt,\\ \Rightarrow \cos\frac{t}{2}dt=2d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\end{array}\right]=\frac{1}{2}\left(\int\frac{-2d\left(\cos\frac{t}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}}+\int\frac{2d\left(\sin\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)=$$

$$=\left[\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c\right]=-\ln\left|\cos\frac{t}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{t}{2}\right|+c=\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+c=\left[\begin{array}{l} tg\, t=x, \quad \Rightarrow\\ t=arctg\ x\end{array}\right]=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{1}{2}arctg\ x\right)\right|+c.$$ ▼

◐ 6. $$\int R\left(x, \quad \sqrt{x^2-a^2}\right)dx. \qquad (1.66)$$

Застосовуємо підстановку $x=\dfrac{a}{\cos t}$. Тоді $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ і

$$\int R\left(x, \quad \sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\int R\left(\frac{a}{\cos t}, \quad \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}\right)\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt=\int R\left(\frac{a}{\cos t}, \quad \frac{a\sin t}{\cos t}\right)\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

В (1.66) можна також застосувати підстановку $x=\dfrac{a}{\sin t}$, або $x=\dfrac{1}{t}$, чи $x=a\, ch\, t$.

▲ Приклад № 91.

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left[x=\frac{1}{\sin t}, dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\right]=$$

$$=-\int\frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}{\frac{1}{\sin t}}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt=-\int\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt=$$

$$=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=-\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(1-\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt=t+ctg\ t+c=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{оскільки } \frac{1}{\sin t}=x,\\ \text{то } \sin t=\frac{1}{x}, \text{ а}\\ t=\arcsin\frac{1}{x}\end{array}\right]=\arcsin\frac{1}{x}+ctg\ \arcsin\frac{1}{x}+c=$$

$$=\begin{bmatrix} ctg\ \arcsin\dfrac{1}{x}=? \\ ctg^2\alpha=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}, \\ ctg\,\alpha=\dfrac{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}{\sin\alpha}, \end{bmatrix}=\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}}+c=$$

$$=\arcsin\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-1}+c. \blacktriangledown$$

▲ **Приклад № 92**.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=\int\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}}dx=$$

$$=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=\begin{vmatrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{vmatrix}=\int\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot 2t\,dt=$$

$$=2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int\frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\int\frac{d\left(1-t^2\right)}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$=-2\sqrt{1-t^2}+2\int\sqrt{1-t^2}dt-2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-2\sqrt{1-t^2}+2\int\sqrt{1-t^2}dt-2\arcsin t=$$

$$=\begin{bmatrix} 2\int\sqrt{1-t^2}dt=\begin{vmatrix} t=\sin z \\ dt=\cos z\,dz \end{vmatrix}=2\int\cos^2 z\,dz= \\ =\int\left(1+\cos 2z\right)dz=z+\dfrac{1}{2}\sin 2z+c= \\ =\left[z=\arcsin t\right]=\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}+c \end{bmatrix}=-2\sqrt{1-t^2}-2\arcsin t+$$

$$+\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}+c=\left[t=\sqrt{x}\right]=-2\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1-x}+c. \blacktriangledown$$

◐ 7. Інтеграли

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

обчислюють за допомогою виділення повного квадрата з квадратного тричлена (§ 4 цього розділу).

▲ **Приклад № 93.**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2x\cdot 1+1\right)+4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}}=$$

$$= \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}} = \begin{bmatrix} \frac{x-1}{2}=t, \quad x=2t+1, \\ dx=2\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \left[t=\frac{x-1}{2}\right] = \ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+5}}{2}\right|+c. \quad ▼$$

▲ **Приклад № 94.**

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+6}}dx =$$

$$= \left[d\left(x^2-4x+6\right)=(2x-4)dx\right] = \int \frac{(2x-4)+10}{2\sqrt{x^2-4x+6}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-4x+6\right)}{\sqrt{x^2-4x+6}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot x\cdot 2+4\right)+2}} =$$

$$= \sqrt{x^2-4x+6} + 5\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}} = \sqrt{x^2-4x+6} +$$

$$= \left[\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}+c\right] = \sqrt{x^2-4x+6} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}} =$$

$$+5\int \frac{d\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}} = \left[\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|+c\right] =$$

$$= \sqrt{x^2-4x+6} + 5\ln\left|\frac{x-2}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right|+c = \sqrt{x^2-4x+6}+5\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x+6}}{\sqrt{2}}\right|+c. \quad ▼$$

§ 7. ІНТЕГРАЛИ ВІД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО БІНОМА

Диференціальним біномом називається вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, де a, b – довільні дійсні числа, а m, n, p – раціональні числа.

Чебишов П.Л.[1] довів, що інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{1.67}$$

береться в скінченному вигляді в трьох випадках:

1). Число p – ціле, або нуль. Тоді вводиться підстановка $x=t^k$, де $k = НСК$ (знаменників дробів m і n).

▲ **Приклад № 95.**

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx = \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2},\, n=\frac{1}{3},\, p=4, \\ p-\text{ціле},\;\; x=t^k; \\ k=HCK\{2;3\}=6,\text{ тому} \\ x=t^6,\quad dx=6t^5dt \end{array}\right] = \int t^3\left(1+t^2\right)^4\cdot 6t^5dt =$$

$$= 6\int t^8\left(1+2t^2+t^4\right)^2 dt = 6\int\left(t^8+4t^{10}+6t^{12}+4t^{14}+t^{16}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{4}{11}t^{11}+\frac{6}{13}t^{13}+\frac{4}{15}t^{15}+\frac{1}{17}t^{17}\right)+c = \left[t=\sqrt[6]{x}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[6]{x^9}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{36}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}}+\frac{8}{5}\sqrt[6]{x^{15}}+c =$$

$$= 2\sqrt{x^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{12}{11}\sqrt[3]{x}+\frac{18}{13}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{5}x+\frac{3}{17}\sqrt[3]{x^4}\right)+c.$$

▼

2). Число p – дробове, але $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. Тоді вводиться підстановка $a+bx^n=t^k$, де k – знаменник дробу p.

▲ Приклад № 96.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}} = \int x^{-1}\left(1+x^2\right)^{-1/3}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} m=-1,\quad n=2,\quad p=-\frac{1}{3}. \\ p-\text{дробове, а } \frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=0, \\ \text{вводимо підстановку } 1+x^2=t^3; \\ x^2=t^3-1,\quad d\left(x^2\right)=d\left(t^3-1\right), \\ 2x\,dx=3t^2dt,\quad dx=\frac{3t^2dt}{2\sqrt{t^3-1}} \end{array}\right] = \int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{\sqrt{t^3-1}\;t\;\sqrt{t^3-1}} = \frac{3}{2}\int\frac{t}{t^3-1}dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{At^2+At+A+Bt^2+Ct-Bt-C}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}, \\ t=(A+B)t^2+(C+A-B)t+A-C, \\ \begin{array}{l} t^2: \\ t: \\ t^0: \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0=A+B, \\ 1=A-B+C, \\ 0=A-C, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-A, \\ C=A, \\ 1=A+A+A, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{3}, \\ B=-\frac{1}{3}, \\ C=\frac{1}{3}. \end{array}\right. \\ \frac{t}{t^3-1}=\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1/3}{t-1}+\frac{-1/3\,t+1/3}{t^2+t+1}. \end{array}\right] =$$

$$=\frac{3}{2}\int\left(\frac{1/3}{t-1}+\frac{-1/3\,t+1/3}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t-1)}{(t-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{(2t-2)}{2(t^2+t+1)}dt=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)-3}{t^2+t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1}+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{\left(t^2+2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\left[\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c\right]=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln\sqrt{t^2+t+1}\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+$$

$$+c=\left[t=\sqrt[3]{1+x^2}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}}\right|+\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}arctg\frac{\mathbf{2}\sqrt[3]{\mathbf{1}+x^2}+\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}+c.$$ ▼

3). p – дробове, $\frac{m+1}{n}$ – дробове, а $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число. Підстановка $ax^{-n}+b=t^k$, k – знаменник дробу p .

▲ **Приклад № 97**.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\int x^0\left(1+x^3\right)^{-1/3}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}m=0,\quad n=3,\quad p=-\frac{1}{3}.\quad \text{Це випадок, коли } \frac{m+1}{n}+p\quad -\\ \text{ціле}: \frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{3}-\frac{1}{3}=0.\quad \text{Підстановка } 1+x^{-3}=t^3,\\ \text{звідки } 1+\frac{1}{x^3}=t^3,\quad x^3+1=t^3x^3,\quad x^3=\frac{1}{t^3-1},\\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}};\quad dx=-\frac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-4/3}\cdot 3t^2dt,\quad dx=\frac{-t^2}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-t^2dt}{\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^4}\,t\cdot\left(t^3-1\right)^{-1/3}}=\int\frac{-t\,dt}{t^3-1}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Скористаємось попереднім прикладом.}\\ \text{Такий інтеграл там знайдено.}\\ \text{Він відрізняється від останнього на}\\ \text{множник} -\dfrac{3}{2} \quad \left(t=\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}\right)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-1}{3}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{x+2\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{3}\ x}+c.$$

▼

Зауваження. На практиці в деяких частинних випадках диференціального бінома застосовується штучний метод:

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+D\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.68)$$

де $P(x)$– многочлен степеня n, $Q(x)$– многочлен степеня $(n-1)$, D– невідоме число, a,b,c – дійсні числа. Зокрема, при $b=0,\ P(x)=x^k$, маємо диференціальний біном.

Приклад № 98. Знайти $\int\sqrt{x^2+a^2}dx=I$.

▲ $$I=\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+a^2}+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Продиференціюємо ліву і праву частини останньої рівності:

$$\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=A\sqrt{x^2+a^2}+(Ax+B)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{D}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

звідки, $x^2+a^2=A(x^2+a^2)+Ax^2+Bx+D.$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{r}x^2:\\ x:\\ x^0:\end{array}\ \begin{cases}2A=1,\\ B=0,\\ Aa^2+D=a^2,\end{cases}\qquad \begin{cases}A=1/2,\\ B=0,\\ D=1/2\,a^2.\end{cases}$$

Тоді $$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}= \quad =\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c.$$

▼

Слід зазначити, що існує ряд функцій, від яких не можна знайти невизначений інтеграл у вигляді елементарних функцій. Так, наприклад, інтеграли

$$\int\sin x^2dx,\quad \int\cos x^2dx,\quad \int\sqrt{1+x^3}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx$$

існують, але не виражаються через елементарні функції. Їх можна обчислити за допомогою степеневих рядів (розділ "Степеневі ряди" розглядатиметься в частині II).

[1] П.Л. Чебишов (1821-1894) – російський математик і механік. Основні його праці з теорії чисел, теорії ймовірностей, інтегрального числення т

§ 8. ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА

Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx, \tag{1.69}$$

де R – раціональна функція, $a \neq 0$, за допомогою підстановки $x = t - \frac{b}{2a}$ зводяться до одного з інтегралів:

1) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 + k^2}\right)dt;$

2) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt;$

3) $\int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt.$

Інтеграли виду (5.69) раціоналізуються також за допомогою підстановок Ейлера, при цьому вважається, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ не має однакових коренів.

Перша підстановка Ейлера. Якщо $a > 0$, тоді підстановка:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x. \tag{1.70}$$

Піднесемо обидві частини рівності (5.70) до квадрата:

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}\ t\ x + ax^2.$$

Звідки знайдемо $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t}$, а

$$dx = \frac{2\left(b \mp 2\sqrt{a}\ t\right)t \pm 2\left(t^2 - c\right)\sqrt{a}}{\left(b \mp 2\sqrt{a}\ t\right)^2}dt.$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x = t \pm \sqrt{a}\,\frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t} = \frac{\mp\sqrt{a}\,t^2 + bt \mp \sqrt{a}\,c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t}$ – раціональна функція від t.

Приклад № 99. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = I.$$

▲ Тут $a = 4 > 0$. Застосуємо підстановку (5.70):

$$\sqrt{4x^2+2x+1}=t-2x.$$

Піднесемо обидві частини останньої рівності до квадрата:

$$4x^2+2x+1=t^2-4tx+4x^2.$$

Звідси $x=\dfrac{t^2-1}{2(1+2t)}$, а $dx=\dfrac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$

Тоді

$$I=\int\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2\left(t-\dfrac{t^2-1}{1+2t}\right)}dt=\int\frac{t^2+t+1}{(1+2t)(t^2+t+1)}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{1+2t}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=\frac{1}{2}\ln|2t+1|+c==\frac{1}{2}\ln|1+4x+2\sqrt{4x^2+2x+1}|+c.$$ ▼

Зауваження. Цей інтеграл неважко обчислюється виділенням повного квадрата.

<u>Друга підстановка Ейлера</u>. Якщо $a<0$, а $c>0$, тоді підстановка:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.$$

Застосовуючи аналогічні перетворення як у першій підстановці, інтеграл (1.68) зведемо до інтеграла від раціональної функції.

Приклад № 100.

Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}.$

▲ Тут $c=1>0,\quad a=-1<0$. Застосовуємо підстановку

$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$, звідки $x=\dfrac{1+2t}{t^2+1}$, тому $x-1=\dfrac{2t-t^2}{t^2+1}$, а

$dx=\dfrac{-2(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2}dt$. Тоді

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-2(t^2+t-1)dt}{(1+t^2)^2\cdot\dfrac{t(2-t)}{1+t^2}\cdot\left(t\,\dfrac{1+2t}{t^2+1}-1\right)}=$$

$$=-2\int\frac{t^2+t-1}{(1+t^2)(2t-t^2)\dfrac{t^2+t-1}{1+t^2}}dt=2\int\frac{dt}{t^2-2t}=2\int\frac{dt}{t(t-2)}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-2|-\ln|t|+c=\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|+c=\ln\left|1-\frac{2}{t}\right|+c=$$

$$=\left[t=\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right]=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1-2x}{\sqrt{1+x-x^2}+1}\right|+c.$$ ▼

<u>Третя підстановка Ейлера</u>. Вона застосовується у випадку, коли дискримінант D квадратного тричлена ax^2+bx+c $D>0$

. Тоді $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – дійсні корені тричлена ax^2+bx+c. В цьому випадку здійснюється підстановка

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ (або $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$).

Приклад № 101.

Обчислити інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+4)}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3x-4}=t(x-1),\\ x^2+3x-4=t^2(x^2-2x+1),\\ \textbf{або}\ (x-1)(x+4)=t^2(x-1)^2,\\ \textbf{звідки}\ x=\dfrac{t^2+4}{t^2-1},\ \textbf{а}\\ dx=-\dfrac{10t}{(t^2-1)^2}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-10t\quad dt}{(t^2-1)^2\,t\cdot\dfrac{5}{t^2-1}}=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+c.$$

▼

Зауваження 1. Випадки $a>0$ і $c>0$ можна звести один до одного заміною $x=\frac{1}{t}$.

2. Підстановки Ейлера мають, в основному, теоретичне значення. На практиці частіше застосовуються штучні методи. Наприклад,

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ обчислюється виділенням повного квадрата з квадратного тричлена;

б) інтеграл $\int\frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де d – дійсне число, обчислюється за допомогою підстановки $t=\frac{1}{x-d}$;

в) інтеграл $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, представляється у вигляді (1.68), де $Q(x)$ – многочлен степеня $(n-1)$, а D – число.

Коефіцієнти многочлена $Q(x)$ і число D визначаються за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

§ 9. ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

9.1. Задача про площу криволінійної трапеції

В курсі геометрії середньої школи розглядалися задачі про площі фігур, обмежених прямолінійними відрізками, а також задачі про площу кола і його частин. Розглянемо задачі про обчислення площ плоскої фігури K, обмеженої довільною замкненою лінією (рис.220). Але спочатку розглянемо випадок, коли фігура K лежить в площині XOY і обмежена графіком неперервної кривої AB, відрізком CD осі абсцис, двома прямими CA і DB, проведеними з кінців відрізка CD паралельно до осі OY (рис.221). Назвемо цю фігуру криволінійною трапецією, а відрізок CD – основою криволінійної трапеції.

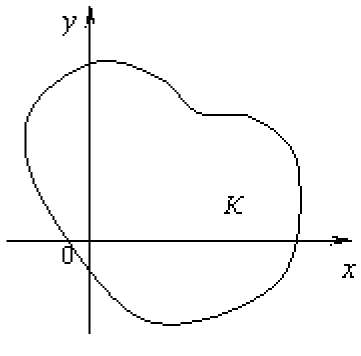


Рис. 220

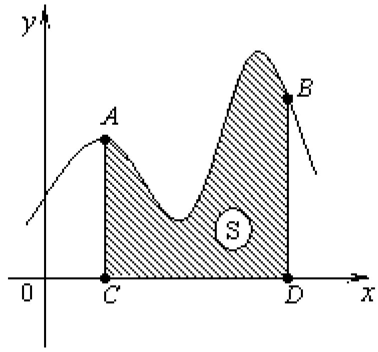


Рис. 221

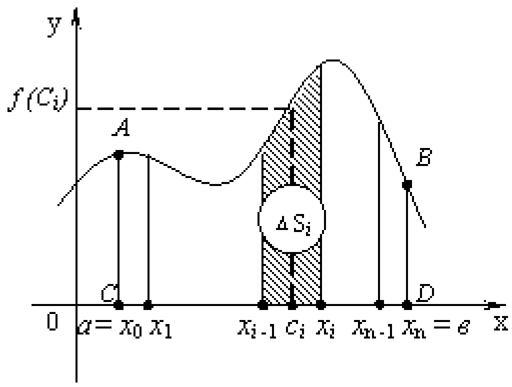


Рис. 222

Нехай точки C і D мають абсциси a і b $(b > a)$відповідно, а крива AB задається рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна і додатна на відрізку $[a; b]$ функція.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на частини точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ так, щоб справджувалися нерівності

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Точки поділу розбивають відрізок $[a; b]$ на n малих відрізків

$$[x_0; x_1], \quad [x_1; x_2], \quad \dots, \quad [x_{n-1}; x_n], \quad (x_0 = a, \quad x_n = b).$$

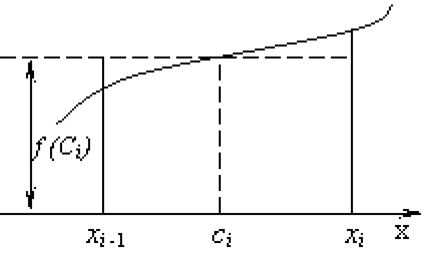


Рис. 223

Проведемо через точки поділу прямі, паралельні до осі OY, розіб'ємо криволінійну трапецію на n малих криволінійних трапецій (рис.222). Площа всієї криволінійної трапеції дорівнює сумі площ усіх n малих криволінійних трапецій. Тому, якщо позначити через S площу всієї криво-лінійної трапеції, а через ΔS_i – площу малої i–ої криволінійної трапеції з основою $[x_{i-1}; x_i]$, $(i = \overline{1, n})$, то

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n,$$

або

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Тут буква Σ (сігма) є знак суми, а символ $\sum_{i=1}^{n}$ означає, що складається n доданків при зміні індекса i від 1 до n.

Щоб обчислити площі малих трапецій, в кожному з малих відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ вибираємо довільну точку c_i $(x_{i-1} < c_i < x_i)$ і обчислюємо в цій точці ординату кривої $f(c_i)$. Потім кожну малу криволінійну трапецію з основою $[x_{i-1}; x_i]$ замінюємо прямокутником з тією самою основою і висотою, що дорівнює $f(c_i)$ (рис.223).

Площа прямокутника з основою $[x_{i-1}; x_i]$ і висотою $f(c_i)$ дорівнює $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, де $x_i - x_{i-1}$ – довжина малого відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Приймаючи площу цього прямокутника за наближене значення площі малої криволінійної трапеції, знайдемо

$$\Delta S_i \approx f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Тоді

$$\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}). \tag{2.1}$$

Причому, ця наближена рівність буде тим точніша, чим менша довжина відрізка Δx_i. Тому виберемо $\max\limits_{i} \Delta x_i$ і нехай $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$. В (6.1) перейдемо до границі при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, дістанемо точне значення площі криволінійної трапеції:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i. \tag{2.2}$$

Задачу розв'язано.

Ми одержали формулу, за якою площа криволінійної трапеції є границею деякої суми, кожний доданок якої – $f(c_i)\Delta x_i$.

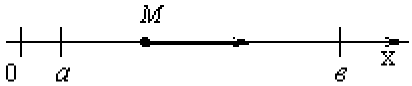


Рис. 224

Рис. 225

9.2. Задача про обчислення роботи змінної сили

Нехай матеріальна точка M рухається під дією сили $\vec{F}$, яка залежить від шляху x, а напрям цієї сили співпадає з напрямом руху точки по прямій OX (рис.224). Нехай величина F сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;b]$ є функцією від x : $F = F(x)$. Якби сила $\vec{F}$ була стала за величиною, то робота A, яку здійснює сила, визначалась би співвідношенням

$$A = F\,(b-a). \tag{2.3}$$

Оскільки, за умовою, сила є змінною величиною, то це співвідношення не можна застосувати.

Визначимо роботу змінної сили $\vec{F}(x)$ на шляху від a до b. Для цього відрізок $[a;b]$ (рис.225) розіб’ємо на n довільних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Припустимо, що відрізок $[x_{i-1}; x_i]$ настільки малий, що $F(x)$ на ньому мало змінюється.

Тому можна вважати, що величина сили в деякій точці c_i елементарного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$ дорівнює $F(c_i)\left(x_{i-1} \le c_i \le x_i\right)$.

Тоді робота, що виконана силою $\vec{F}(x)$ на шляху довжиною Δx_i, наближено дорівнює:

$$A_i \approx F(c_i)\,\Delta x_i, \quad i = \mathbf{1, 2, 3}, \ldots$$

Робота сили $\vec{F}$ на всьому відрізку $[a;b]$ наближено дорівнює

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i. \tag{2.4}$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менша довжина Δx_i.

Виберемо $\max\limits_i \Delta x_i$. Нехай $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$. Знайдемо границю

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

Якщо ця границя існує, скінченна і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на елементарні, ні від вибору точок c_i, то вона називається ***роботою змінної сили*** $\vec{F} = \vec{F}(x)$ на відрізку $[a; b]$. Методи розв'язування задач геометрії, економіки, фізики мають аналогічну структуру.

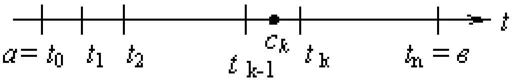


Рис. 226

Ми знову, як і в попередній задачі, одержали суму вигляду $\sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$. Такі суми можна одержати і при розв'язуванні задач механіки, фізики.

9.3. Задача про обчислення шляху за відомою швидкістю

Нехай точка M рухається прямолінійно з відомою в кожний момент часу t швидкістю $v = v(t)$. Треба визначити той шлях S, який точка M пройде за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$.

Якщо точка M рухається рівномірно, тобто її швидкість v стала $(v = const)$, то пройдений шлях S за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$ визначається за формулою

$$S = v(b - a).$$

Якщо рух нерівномірний, тобто v не є сталою, то за попередньою формулою не можна обчислити S.

Застосуємо метод, подібний до методу обчислення роботи змінної сили, чи площі криволінійної трапеції. Відрізок $[a; b]$ розіб'ємо на n довільних частин точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Розглянемо будь-який частинний відрізок $[t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (рис.226). Нехай відрізок $[t_{k-1}; t_k]$ настільки малий, що швидкість $v = v(t)$ на ньому мало змінюється. Тоді її можна вважати сталою, наприклад, нехай вона дорівнює $v(c_k)$, де $c_k \in [t_{k-1}; t_k]$, а шлях ΔS_k, пройдений точкою M за час $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ визначатиметься так:

$$\Delta S_k \approx v(c_k) \cdot \Delta t_k \quad (k = 1, 2, \ldots\ n).$$

Отже

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k.$$

Знову дістали суму вигляду $\sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k$. Візьмемо $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k$. Нехай $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k \to 0$, тоді

$$S = \lim_{\max\limits_{k} \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k,$$

за умови, що ця границя існує.

§ 10. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

10.1. Означення визначеного інтеграла

Означення 1. Суми вигляду $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = S_n$ називаються ***інтегральними*** сумами функції на відрізку $[a;b]$.

Інтегральні суми залежать від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i і від вибору в них точок c_i. Це твердження стає особливо зрозумілим, коли повернутись до задачі про обчислення площі криволінійної трапеції. Площі прямокутників (рис.217) різні для різного розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i і різного вибору точок c_i.

Означення 2. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок c_i, при прямуванні до нуля довжини найбільшого з частинних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$.

Отже,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_1,$$

де $\int_a^b$ – знак визначеного інтеграла;

a, b – відповідно нижня і верхня межі інтегрування;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз.

◐ **Теорема**. Існування визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, як границя інтегральних сум $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ при $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$, існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки, ні від вибору точок c_i.
Визначений інтеграл – стале число, яке залежить від вигляду функції $f(x)$, від величини відрізка $[a;b]$ і не залежить від того, як позначено змінну інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Функція, яка має визначений інтеграл на проміжку (відрізку) $[a;b]$, називається ***інтегровною*** на цьому проміжку (відрізку).

10.2. Геометричний і механічний зміст визначеного інтеграла

Порівнюючи задачу про обчислення площі криволінійної трапеції з означенням визначеного інтеграла, помічаємо, що площа дорівнює визначеному інтегралу від функції, графік якої зверху обмежує криволінійну трапецію, з в боків – прямі $x=a$, $x=b$ тобто, якщо $f(x)\ge 0$, то

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.5}$$

В цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла. При цьому, якщо $f(x)<0$, тобто графік лежить нижче осі OX, то площа вважається від'ємною.
Аналогічно, порівнюючи задачу про обчислення роботи змінної сили $\vec{F}=\vec{F}(x)$ на відрізку $[a;b]$ з означенням визначеного інтеграла, можна зробити висновок, що робота A дорівнює визначеному інтегралу від функції $F(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла можна інтерпретувати інакше.
А саме, якщо функція $f(x)$ має на заданому відрізку $[a;b]$ первісну функцію $F(x)$, то цих первісних безліч (розділ V, § I) і всі вони відрізняються одна від одної на сталу величину, тобто, якщо $\Phi(x)$ – будь-яка інша первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то $\Phi(x)=F(x)+c \quad (c=const; \quad c=\Phi(x)-F(x))$.

Розглянемо різницю $F(b)-F(a)$, яка є приростом первісної при переході від $x=a$ до $x+\Delta x=b$. Оскільки $\Phi(x)$ також є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то $\Phi(b)-\Phi(a)= =(F(b)+c)-(F(a)+c) = F(b)-F(a)$.

Нагадаємо (розділ V, § I), що графіки різних первісних одержують один з одного, зсуваючи вздовж осі OY паралельно до самого себе графік первісної $F(x)$, це означає, що різниця $F(b)-F(a)$ є сталою для всіх первісних функцій $f(x)$ і дорівнює S, де S – площа криволінійної трапеції $ABCD$ (рис.216), тобто

$$F(b)-F(a)=\Phi(b)-\Phi(a)=S.$$

За формулою (6.5) $S=\int_a^b f(x)\,dx$, тобто

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Формула (6.6) називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***.

10.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, тоді справедливо:

◐ 1. $\int_a^a f(x)\,dx=0$, за означенням інтеграла.

◐ 2. Якщо у визначеному інтегралі переставити межі інтегрування, то знак інтеграла змінюється на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$. Тоді (за формулою (6.6)) $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, а $\int_a^b f(x)\,dx= F(b)-F(a)= -(F(a)-F(b))$, тобто $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$. ◑

◐ 3. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\quad c=const\neq\mathbf{0}.$$

Доведення. Функція $c\,F(x)$ є первісною для функції $c\,f(x)$. Застосовуючи формулу (6.6), дістанемо

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\cdot F(x)\Big|_a^b=c\,(F(b)-F(a))=c\int_a^b f(x)\,dx.$$ ◑

◐ 4. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні функції для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно. Тоді, очевидно, функція $F_1(x) \pm F_2(x)$ є первісною для функції $f_1(x) \pm f_2(x)$. Тому

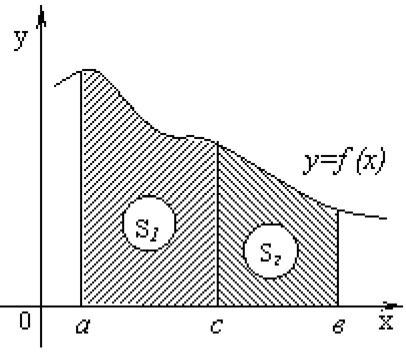


Рис. 227

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = (F_1(x) \pm F_2(x))\Big|_a^b = (F_1(b) \pm F_2(b)) - (F_1(a) \pm F_2(a)) =$$

$$= (F_1(b) - F_1(a)) \pm (F_2(b) - F_2(a)) = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$ ◑

◐ 5. Нехай точка $x = c$ належить відрізку $[a; b]$ (рис.227), тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Тоді $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) =$

$$= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$ ◑

◐ 6. Якщо $a < b$ і $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x) \geq 0$. Оскільки $F'(x) = f(x) \geq 0$, то $F'(x) \geq 0$, а це означає, що функція $F(x)$ не спадна і, тому, при $b > a$ $F(b) - F(a) \geq 0$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$ ◑

◐ 7. Якщо $a < b$ і $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Доведення. Розглянемо різницю $\varphi(x) - f(x) \geq 0$. За властивістю 6

$$\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx \geq 0,$$

а за властивістю 5

$$0 \leq \int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

звідки $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$ ◑

◐ 8. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, якщо $a<b$ (рис.228), (рис.229).

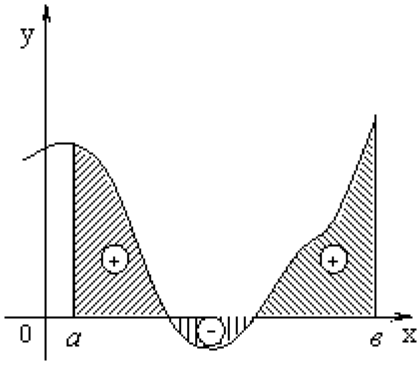


Рис. 228

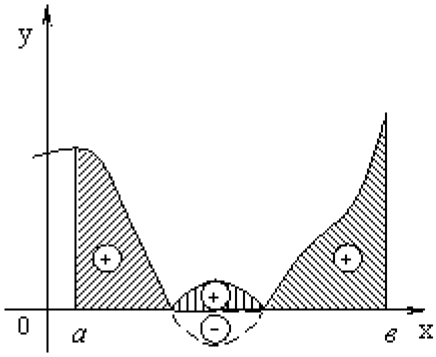


Рис. 229

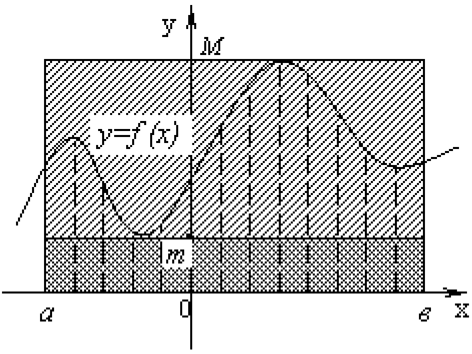


Рис. 230

Ця властивість доводиться легко за властивістю 7. ◑

◐ 9. Якщо M і m – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ відповідно (рис.230), то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{2.7}$$

Доведення. Оскільки m і M найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то, за теоремою Вейєрштрасса $m \le f(x) \le M$, а за властивістю 7

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Використовуючи властивість 3, дістанемо нерівність (2.7). ◑

◐ 10. **Теорема про середнє значення**: Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і нехай на всьому відрізку $[a;b]$ виконується нерівність $m \le f(x) \le M$, тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boldsymbol{\mu}(b-a), \text{ де } m \le \boldsymbol{\mu} \le M. \tag{2.8}$$

Доведення. За властивістю 9, має місце нерівність (2.7). Поділимо всі члени цієї нерівності на $b-a$, дістанемо

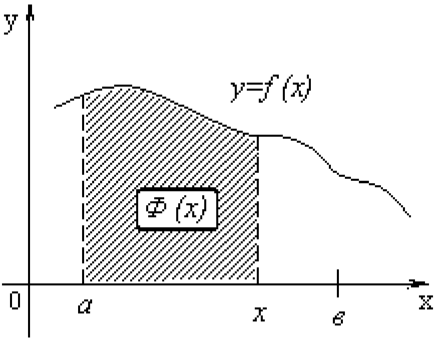


Рис. 231

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Позначимо $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$, звідки матимемо рівність (2.8), де $m \leq \mu \leq M$. ◑

Відношення $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ називають ***середнім*** значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

◐ 11. **Визначений інтеграл як функція верхньої межі**. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, то вона інтегровна і на $[a;x]$, де x – будь-яке значення із $[a;b]$ (за властивістю 5). Замінимо верхню межу "b" визначеного інтеграла змінною x, а змінну інтегрування позначимо через t, то дістанемо вираз

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{2.9}$$

який є функцією змінної x (рис.231). Ця функція має властивості:

1) якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, яка дорівнює $f(x_0)$:

$$\Phi'(x_0) = f(x_0);$$

2) якщо допустити, що функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a;b]$, то

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Іншими словами, для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ завжди існує первісна, а саме: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$

Властивість її легко довести, використовуючи геометричний зміст невизначеного інтеграла (розділ V, § I).

10.4. Формула Ньютона-Лейбніца

◐ Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна функція для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.10}$$

Ця формула є основною формулою інтегрального числення і називається формулою Ньютона-Лейбніца. Вона дає простий спосіб для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції $f(x)$. Подамо інакше доведення формули (2.10).

Доведення. Нехай $F(x)$ – будь-яка первісна функція для функції $f(x)$, тоді

$$\int_a^x f(t)\,dt,$$

де $x \in [a;b]$, також є первісною для функції $f(x)$. Оскільки $\Phi(x) = F(x) + c$ (за властивостями первісних), то

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Для знаходження сталої c покладемо $x = a$, тоді

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c,$$

або $F(a) + c = 0$, тобто $c = -F(a)$. Отже

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Нехай $x = b$. Замінимо змінну інтегрування t на x, одержимо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Позначимо $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді останню формулу можна записати так:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$ ◑

Формула Ньютона-Лейбніца дає зручний метод обчислення визначених інтегралів, оскільки за допомогою цієї формули можна обчислити визначені інтеграли від усіх тих функцій, для яких можна знайти первісні.

Приклад № 1. Обчислити

$$\int_0^7 \sqrt[3]{x+\mathbf{1}}\,dx.$$

▲

$$\int_0^7 \sqrt[3]{x+1}\,dx = \int_0^7 (x+1)^{1/3}\,d(x+1) = \left[\begin{array}{l}\text{використовуємо}\\ \text{табличний інтеграл}\\ \int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c\end{array}\right] =$$

$$=\frac{(x+1)^{4/3}}{4/3}\Bigg|_0^7=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}\Bigg|_0^7=\begin{bmatrix}\text{за формулою}\\ \text{Ньютона - Лейбніца}\end{bmatrix}=\ \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-\sqrt[3]{1^4}\right)=\frac{3}{4}(16-1)=\frac{45}{4}.\ \blacktriangledown$$

Приклад № 2. Обчислити

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$\blacktriangle\ \int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\ \frac{d(5x)}{5}=\frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\ d(11+5x)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1}=\ =-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{(11+5(-1))^2}-\frac{1}{(11+5(-2))^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}.\ \blacktriangledown$$

Приклад № 3. Обчислити

$$\int_4^9\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy.$$

$$\blacktriangle\ \int_4^9\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy=\int_4^9\frac{(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y}+1}dy=\int_4^9\left(\sqrt{y}-1\right)dy=$$

$$=\int_4^9\sqrt{y}\ dy-\int_4^9 dy=\frac{y^{3/2}}{3/2}\Bigg|_4^9-y\ \Bigg|_4^9=\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\Bigg|_4^9-(9-4)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right)-5=\frac{2}{3}(9\cdot 3-4\cdot 2)-5=7\frac{2}{3}.\ \blacktriangledown$$

Приклад № 4. Обчислити

$$\int_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$$

$$\blacktriangle\ \int_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx=\begin{bmatrix}d\left(e^{1/x}\right)=e^{1/x}\left(\dfrac{1}{x}\right)'dx=\\ =-\dfrac{1}{x^2}\,e^{1/x}\ dx\end{bmatrix}=-\int_1^2 d\left(e^{1/x}\right)=-e^{1/x}\Bigg|_1^2=$$

$$=-e^{1/2}+e=e-\sqrt{e}.\ \blacktriangledown$$

Приклад № 5. Обчислити

$$\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

▲ $$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[d(1+\ln x) = \frac{dx}{x} \right] = \int_1^{e^3} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} =$$

$$= \int_1^{e^3} (1+\ln x)^{-1/2} d\ (1+\ln x) = 2\sqrt{1+\ln x}\ \Big|_1^{e^3} = 2\sqrt{1+\ln e^3} - 2\sqrt{1+\ln 1} =$$

$$= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2.$$ ▼

Приклад № 6. Обчислити

$$\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

▲ $$\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \left[\begin{array}{l} 8+2x-x^2 = -(x^2-2x-8) = \\ = -((x^2-2x+1)-9) = 9-(x-1)^2 \end{array} \right] = \int_{-0,5}^{1} \frac{d\ (x-1)}{\sqrt{9-(x-1)^2}} =$$

$$= \arcsin\ \frac{x-1}{3}\Big|_{-0,5}^{1} = \arcsin\ 0 - \arcsin\ \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$ ▼

Приклад № 7. Обчислити

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt.$$

▲ $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[\begin{array}{l} \cos t \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(2t - \frac{\pi}{4} - t\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(t + 2t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}+t\right)dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)dt = -\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}+t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} -$$

$$-\frac{1}{6}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-3}{4}\pi\right) - \frac{1}{6}\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{3}.$$ ▼

§ 11. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

11.1. Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі

В розділі V розглядались методи знаходження невизначених інтегралів, одним з яких є метод заміни змінної. Оскільки між визначеним і невизначеним інтегралами існує тісний зв’язок , то, звичайно, цей метод можна застосувати і до обчислення визначеного інтеграла.

◐ **Теорема 1**. Нехай виконуються умови:

1) $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$;

2) функція $x=\varphi(t)$ та її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні для всіх $t\in[\alpha;\ \beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$ і для всіх $t\in[\alpha;\ \beta]$: $a<\varphi(t)<b$.

Тоді
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона має первісну $F(x)$ на $[a;\ b]$. Функція $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ має первісну $F(\varphi(t))$ для всіх $t\in[\alpha;\ \beta]$. За формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Отже,
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Зауваження: 1. При знаходженні невизначеного інтеграла методом заміни змінної $x=\varphi(t)$ в знайденій первісній доводилося переходити до “старої” змінної x. У визначеному інтегралі в цьому немає потреби.

2. Якщо функція $x=\varphi(t)$ не монотонна, то рівняння $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ дають декілька різних пар значень $\alpha,\ \beta$. Тоді слід брати будь-яку з пар.

3. Часто доводиться здійснювати підстановку $t=\tau(x)$.

Приклад № 8. Обчислити інтеграл $\int_4^9\frac{x\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

▲
$$\int_4^9\frac{x\,dx}{\sqrt{x}-1}=\left[\begin{array}{lll} x=t^2, & t=\sqrt{x} & \\ dx=2t\,dt & & \\ x & 4 & 9\\ t & 2 & 3\end{array}\right]=\int_2^3\frac{t^2\cdot 2t\,dt}{t-1}=2\int_2^3\frac{t^3\,dt}{t-1}=2\int_2^3\frac{(t^3-1)+1}{t-1}dt=$$
$$=2\int_2^3\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)+1}{t-1}dt=2\int_2^3\left(t^2+t+1\right)dt+2\int_2^3\frac{d\,(t-1)}{t-1}=$$
$$=2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Big|_2^3=2\left(9+\frac{9}{2}+3+\ln 2-\frac{8}{3}-2-2-\ln 1\right)=\frac{59}{3}+2\ln 2.$$ ▼

Приклад № 9. Обчислити $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{lll} \text{В цьому випадку вводимо} & & \\ \text{змінну } x = a\sin t, & dx = a\cos t\, dt, & \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a} & x & 0 \quad a \\ & t & 0 \quad \pi/2 \end{array}\right] =$$

▲

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\, dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \frac{a^2\pi}{4}.$$ ▼

Приклад № 10. Обчислити $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^3}$.

▲

$$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^3} = \left[\begin{array}{lll} x = tg\, t, & & \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}, & & \\ x & 0 & 1 \\ t & 0 & \pi/4 \end{array}\right] = \int_0^{\pi/4} \frac{tg^2 t\;\; dt}{(1 + tg^2 t)^3 \cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{tg^2 t\;\; dt}{\dfrac{1}{\cos^6 t}\cdot\cos^2 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t\;\; dt}{\cos^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos^4 t}} = \int_0^{\pi/4} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/4} (\sin t\cdot\cos t)^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \sin^2 2t\, dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right) = \frac{\pi}{32}.$$ ▼

Приклад № 11. Обчислити $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$.

▲

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx = \left[\begin{array}{lll} \sqrt{x^2-1} = t, & x^2 - 1 = t^2, & \\ x = \sqrt{t^2+1}, & dx = \dfrac{t\;\; dt}{\sqrt{t^2+1}} & \\ x & 1 & 2 \\ t & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right] = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t\;\; dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(t^2+1) - 1}{t^2+1}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = (t - arctg\, t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$ ▼

Приклад № 12. Обчислити $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

▲

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \left[\begin{array}{lll} e^x - 1 = t^2, & e^x = t^2 + 1, & \\ e^x dx = 2t\, dt; & dx = \dfrac{2t\, dt}{t^2+1} & \\ x & 0 & \ln 2 \\ t & 0 & 1 \end{array}\right] = \int_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{(t^2+1) - 1}{t^2+1}\, dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = (2t - 2arctg\, t)\Big|_0^1 =$$

$$= 2(1 - arctg1 - 0 + arctg0) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}. \ ▼$$

Приклад № 13. Обчислити $\int\limits_0^{\ln 17} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\,dx.$

▲ $$\int\limits_0^{\ln 17} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\,dx = \left[\begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, \\ e^x = t^2 + 1, \\ e^x \cdot dx = 2t\,dt \\ x \quad 0 \quad \ln 17 \\ t \quad 0 \quad 4 \end{array}\right] = \int\limits_0^4 \frac{2t^2\,dt}{t^2 + 4} = 2\int\limits_0^4 \frac{(t^2 + 4) - 4}{t^2 + 4}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^4 dt - 8\int\limits_0^4 \frac{dt}{t^2 + 4} = \left(2t - 8 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 2\,(4 - 2arctg\,2). \ ▼$$

11.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай функції u і ν диференційовні по x. Розглянемо диференціал їхнього добутку

$$d\,(u\,\nu) = u\,\nu' dx + \nu\,u' dx = u\,d\nu + \nu\,du.$$

Інтегруючи обидві частини в межах від a до b, маємо

$$\int\limits_a^b d\,(u\,\nu) = \int\limits_a^b u\,d\nu + \int\limits_a^b \nu\,du.$$

Оскільки $\int d(u\,\nu) = u\,\nu + c$, то $\int\limits_a^b d\,(u\,\nu) = u\,\nu\Big|_a^b$. Тоді $u\,\nu\Big|_a^b = \int\limits_a^b u\,d\nu + \int\limits_a^b \nu\,du.$ Звідси одержимо

$$\int\limits_a^b u\,d\boldsymbol{\nu} = u\,\boldsymbol{\nu}\Big|_a^b - \int\limits_a^b \boldsymbol{\nu}\,du. \tag{2.12}$$

Зауваження. Рекомендації до вибору функцій u і $d\nu$ давались в розділі V. Використовуючи їх, розглянемо приклади.

Приклад № 14. Обчислити

$$\int\limits_0^{\pi/6} x \sin 4x\,dx.$$

▲ $$\int\limits_0^{\pi/6} x \sin 4x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ d\nu = \sin 4x\,dx & \nu = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\,x\cos 4x\Bigg|_0^{\pi/6} + \int\limits_0^{\pi/6} \frac{1}{4}\cos 4x\,dx = -\frac{\pi}{24}\cos\frac{4\pi}{6} + \frac{1}{4}\cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\Bigg|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{\pi}{24}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{16}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{24}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$= -\frac{\pi}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{48}+\frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \blacktriangledown$$

Приклад № 15. Обчислити

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx.$$

$$\blacktriangle \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ d\nu = e^{-x}\,dx & \nu = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= x\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - e^{-1} + e^{0} = 1 - \frac{2}{e}. \blacktriangledown$$

Приклад № 16. Обчислити

$$\int_1^2 x\log_2 x\,dx.$$

$$\blacktriangle \int_1^2 x\log_2 x\,dx = \begin{bmatrix} u = \log_2 x & du = \dfrac{1}{x\ln 2}dx \\ d\nu = x\,dx & \nu = \dfrac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x\ln 2}\,dx = 2\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 1 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 x\,dx =$$

$$= 2 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{4\ln 2} = 2 - \frac{3}{4\ln 2}. \blacktriangledown$$

Приклад № 17. Обчислити

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx.$$

$$\blacktriangle \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ d\boldsymbol{\nu} = \cos x\,dx & \boldsymbol{\nu} = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2x}\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\cdot 2e^{2x}dx = e^{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - e^{0}\sin 0 -$$

$$-2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cdot\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ d\nu = \sin x\,dx & \nu = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}\cos x\,dx\right) =$$

$$= e^{\pi} + 2e^{\pi}\cos\frac{\pi}{2} - 2e^{0}\cos 0 - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx; \Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx,$$

$$\Rightarrow 5\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2,$$ звідки $$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}. \blacktriangledown$$

Приклад № 18. Обчислити

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$$

▲
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ d\nu=\frac{dx}{x^3} & \nu=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2x^2} \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2e^2}\ln e+\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\int_1^e x^{-3}dx=$$

$$=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^e=-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right).$$ ▼

Приклад № 19. Обчислити

▲
$$\int_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,dx=\begin{bmatrix} x=t^2, & dx=2t\,dt & \\ x & 0 & \pi^2/4 \\ t & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}=\int_0^{\pi/2}\sin t\cdot 2t\,dt=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}t\cdot\sin t\,dt=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ d\nu=\sin t\,dt & \nu=-\cos t \end{bmatrix}=2\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt\right)=$$

$$=2\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin t\Big|_0^{\pi/2}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=2.$$ ▼

Приклад № 20. Обчислити

$$\int_0^4\sqrt{9+x^2}\,dx.$$

▲
$$\int_0^4\sqrt{9+x^2}\,dx=\int_0^4\frac{9+x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx=\int_0^4\frac{9}{\sqrt{9+x^2}}dx+\int_0^4\frac{x\cdot xdx}{\sqrt{9+x^2}}=9\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|\Big|_0^4+\int_0^4 x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=x, \quad dv=\frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}} \\ du=dx, \quad \nu=\int\frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}= \\ =\int\frac{\frac{1}{2}d\left(9+x^2\right)}{\sqrt{9+x^2}}=\sqrt{9+x^2} \end{matrix}\right.=9\ln\left|4+\sqrt{25}\right|-9\ln\sqrt{9}+x\cdot\sqrt{9+x^2}\Big|_0^4-$$

$$-\int_0^4\sqrt{9+x^2}\,dx=9(\ln 9-\ln 3)+20-\int_0^4\sqrt{9+x^2}\,dx.$$

Маємо $\int\limits_0^4 \sqrt{9+x^2}dx = 9\ln\frac{9}{3} + 20 - \int\limits_0^4 \sqrt{9+x^2}dx, \quad 2\int\limits_0^4 \sqrt{9+x^2}dx = 9\ln 3 + 20,$

звідки $\int\limits_0^4 \sqrt{9+x^2}dx = \frac{9}{2}\ln 3 + 10.$ ▼

Приклад № 21. Обчислити

$$\mathrm{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

▲ Запишемо заданий інтеграл так:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx.$$

Інтегруємо частинами:

$u = \sin^{n-1} x, \; dv = \sin x dx, \; du = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x dx, \; v = -\cos x.$

За формулою (6.12), маємо:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx = (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Отже, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n, \; I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$, звідки $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$

Знаючи $I_{n-2} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$, за рекурентною формулою

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \tag{2.13}$$

можна обчислити інтеграл I_n.

Розглянемо два випадки:

1) $n = 2m$ ($m \geq 0$ - ціле дійсне число).

Нехай $m = 0$, тоді

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

За формулою (2.13) знайдемо (при $m = 1$, n=2):

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$(m = 2, n = 4)$: $\quad I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2};$

$(m = 3, n = 6)$: $\quad I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2};$

$(m = 4, n = 8)$: $\quad I_8 = \frac{7}{8}I_6 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2}$ і т.ін.

За методом математичної індукції при $m = k-1$ $(n = 2k-2)$, нехай

$$I_{2k-2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2k-2)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

тоді $$I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-3)(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-2)(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $$I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$ при $n = 2m$.

2) $n = 2m+1$ - непарне.

Тоді $$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

За формулою (6.13): $$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{1\cdot 3};$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5};\quad I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$ і т.ін.

Нехай виконується рівність (2.13) при $m = k-1$ $(n = 2k-1)$:

$$I_{2k-1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)},$$

тоді $$I_{2k-1} = \frac{(2k+1)-1}{2k+1} \cdot I_{2k-1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Отже, $$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases}$$ ▼

Приклад № 22.

▲ Обчислити

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \left| \begin{array}{lll} x = \sin t, & x & t \\ dx = \cos t\, dt & 0 & 0 \\ & 1 & \pi/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^n \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^{2n+1} dt = \left| \begin{array}{lll} \frac{\pi}{2} - t = z, & t & 0 \quad \pi/2 \\ dz = -dt, & z & \pi/2 \quad 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} (\sin z)^{2n+1} dz = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} z\, dz = [\text{враховуючи приклад № 21}] =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots (2n+1)} = \frac{2^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \frac{2^n \cdot n! \, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Відповідь: $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$ ▼

11.3. Інтегрування парних та непарних функцій на симетричному проміжку

◐ 1.Нехай $f(x)$ – парна функція, тоді

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int\limits_0^a f(x)\, dx.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ – парна функція, то $f(-x) = f(x)$. Тоді

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x) dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx = \begin{bmatrix} x = -t, & x & -a & 0 \\ dx = -dt, & t & a & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int\limits_a^0 f(-t)\, dt + \int\limits_0^a f(x)\, dx = \int\limits_0^a f(t)\, dt + \int\limits_0^a f(x)\, dx = \int\limits_0^a f(x)\, dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx = 2\int\limits_0^a f(x)\, dt.$$

◐ 2.Нехай $f(x)$ – непарна функція, тоді

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 0.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ – непарна функція, то $f(-x) = -f(x)$. Тоді

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x) dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx = \begin{bmatrix} x = -t, & x & -a & 0 \\ dx = -dt, & t & a & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int\limits_a^0 f(-t)\, dt + \int\limits_0^a f(x)\, dx = \int\limits_a^0 f(x)\, dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx = -\int\limits_0^a f(x)\, dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx = 0.$$ ◑

Приклад № 23. Обчислити

$$\int\limits_{-a}^{a} x^3 \cos x dx = I.$$

▲ Оскільки функція $f(x) = x^3 \cos x$ - непарна на симетричному проміжку $[-a;\, a]$, то можна зразу сказати, що $I = 0$. Дійсно,

$$I = \int\limits_{-a}^{a} x^3 \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^3, & du = 3x^2 dx \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 \sin x \Big|_{-a}^{a} - \int\limits_{-a}^{a} 3x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= a^3 \sin a - (-a)^3 \sin(-a) - 3(-x^2 \cos x \Big|_{-a}^{a} + \int\limits_{-a}^{a} 2x \cos x dx) =$$

$$= 3a^2\cos a - 3(-a)^2\cos(-a) - 6\int\limits_{-a}^{a} x\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x\,dx, & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -6\left(x\sin x\Big|_{-a}^{a} - \int\limits_{-a}^{a}\sin x\,dx \right) = -6a\sin a + 6(-a)\sin(-a) +$$

$$+ 6(-\cos x)\Big|_{-a}^{a} = -6\cos a + 6\cos(-a) = 0. \qquad \blacktriangledown$$

Приклад № 24.

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx.$$

▲ Оскільки $f(x) = \cos^2 x$ - парна функція, то $I = \pi$. Дійсно, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(-\pi + \frac{1}{2}\sin(-2\pi)\right) = \pi. \qquad \blacktriangledown$$

§ 12. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Звернемо увагу на те, що, формулюючи теорему існування визначеного інтеграла, ми підкреслити два моменти:

1) відрізок інтегрування $[a;b]$ у визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ скінченний;
2) підінтегральна функція $f(x)$ на цьому відрізку не перетворюється в нескінченність.
Якщо порушується хоча б одна з цих умов, тобто, якщо функція є необмеженою поблизу деякої точки з відрізка $[a;b]$ чи поблизу меж інтегрування, то визначений інтеграл називається ***невласним***.
В залежності від того, яка з умов не виконується, розрізняють деякі класи невласних інтегралів.

12.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

а). Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; \ +\infty)$, де a – деяка стала число, і інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $b > a$ – довільне дійсне число, $-\infty < a < b < \infty$, тоді інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує для будь-якого $b > a$ і він є функцією верхньої межі

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Означення 3. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$, то вона називається ***невласним інтегралом*** функції $f(x)$ від a до $+\infty$ і позначається $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.
Отже,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{2.13}$$

Означення 4. Якщо границя (6.13) – скінченна, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***збіжним***, а сама функція $f(x)$ називається ***інтегровною*** на $[a;+\infty)$. Якщо ж границя (2.13) не існує, чи є нескінченністю ($+\infty$, або $-\infty$), то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***розбіжним***.

Приклад № 25. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

▲ За означенням $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$

Отже, границя цього невласного інтеграла скінченна, тому інтеграл збігається. Значення границі приймається за значення невласного інтеграла, тобто інтеграл дорівнює 1. ▼

Приклад № 26. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

▲ $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-x}dx\right) =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Bigg|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+e^0\right) = \mathbf{1} - \lim_{b\to+\infty}\frac{\mathbf{1}}{e^b} = \mathbf{1}.$$

Оскільки $b \to +\infty$, то $e^b \to +\infty$, і тому $\frac{1}{e^b} \to 0$. Тоді $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, тобто $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ збіжний. Невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (рис.232) виражає площу фігури, обмеженої лініями $y = e^{-x},\ x = 0,\ y = 0,\ S = 1.$ ▼

Приклад № 27. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

▲ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Bigg|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = \infty.$ ▼

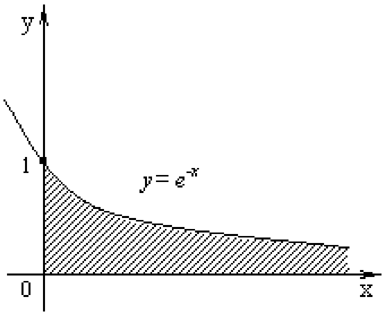


Рис. 232

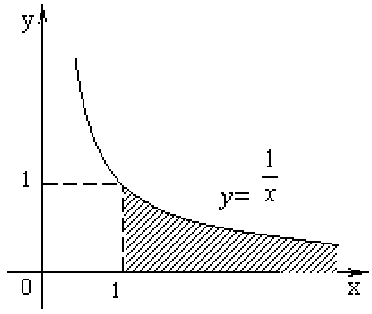


Рис. 233

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ розбігається. Тому фігурі, обмеженій лініями $x=1$, $y=0$, $y=\frac{1}{x}$ (рис.233) не можна приписати ніяке значення площі.

Приклад № 28. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx.$

▲ $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{b}\sin x\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_0^b=$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\cos b+\cos 0\right)=1-\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b.$

Але границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$ не існує, тому $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$ розбіжний. ▼

Приклад № 29.

Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+1}.$

▲ $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{x}{x^3+1}dx=$

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C}{x^3+1}$$

$$x=(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C,$$

$$\begin{matrix}x^2:\\ x:\\ x^0:\end{matrix}\begin{cases}A+B=0,\\ B+C-A=1,\\ 0=A+C,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-A,\\ C=-A,\\ -3A=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{3},\\ B=\frac{1}{3},\\ C=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

$$=\frac{x}{x^3+1}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}\qquad=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\int_0^b\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln|x+1|\Big|_0^b+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{(2x-1)+3}{x^2-x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln|b+1|+\ln 1+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{3dx}{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln|b+1|+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int_0^b\frac{dx}{(x^2-2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln|1+b|+\frac{1}{2}\ln|b^2-b+1|-\frac{1}{2}\ln 1+\frac{3}{2}\int_0^b\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}\left(-2\ln|1+b|+\ln|b^2-b+1|+\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^b\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b^2-b+1}{(b+1)^2}\right|+\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\frac{2b-1}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$ тобто інтеграл збігається. ▼

б) Аналогічно визначається ***невласний інтеграл*** з нескінченною нижньою межею:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.14)$$

в) Якщо функція $f(x)$ визначена на $(-\infty;+\infty)$ і інтегровна на $[a;b]$ (a і b – довільні дійсні числа), то

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)\,dx=$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx, \qquad (2.15)$$

де c – довільне дійсне число і $c\in[a;b]$.

Тут аналогічно вводиться означення збіжності чи розбіжності невизначеного інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ як і у випадку а).

Приклад № 30. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\,dx.$$

▲ $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{x}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(e^{x}\Big|_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(e^{x}\Big|_{0}^{b}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{0}-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(e^{b}-e^{0}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{оскільки } a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}},\ \text{то } e^{a}\to 0 \\ \text{при } a\to-\infty, \quad \text{а } e^{b}\to\infty \text{ при } b\to+\infty \end{array}\right] = 1+\infty-1=\infty.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}\,dx$ розбігається. ▼

Приклад № 31. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}.$$

▲ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}} = \left[\begin{array}{l} \textbf{розіб'ємо інтервал}\left(-\infty;\ +\infty\right) \\ \textbf{точкою } x=\mathbf{1} \textbf{ на два інтервали} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}} + \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}} + \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(arctg\ x\Big|_{a}^{1}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(arctg\ x\Big|_{1}^{b}\right) =$$

$$= arctg\,\mathbf{1} - \lim_{a\to-\infty} arctg\ a + \lim_{b\to+\infty} arctg\ b - arctg\,\mathbf{1} == \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\pi}.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$ збігається. ▼

Приклад № 32. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+2x+2}.$$

▲ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+\mathbf{2}x+\mathbf{2}} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^{2}+\mathbf{2}x+\mathbf{2}} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+\mathbf{2}x+\mathbf{2}} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x^{2}+\mathbf{2}x+\mathbf{1})+\mathbf{1}} + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x^{2}+\mathbf{2}x+\mathbf{1})+\mathbf{1}} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{d\,(x+\mathbf{1})}{(x+\mathbf{1})^{2}+\mathbf{1}} + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{d\,(x+\mathbf{1})}{(x+\mathbf{1})^{2}+\mathbf{1}} = \lim_{a\to-\infty}\left(arctg\,(x+\mathbf{1})\Big|_{a}^{0}\right) +$$

$$+ \lim_{b\to\infty}\left(arctg\,(x+\mathbf{1})\Big|_{0}^{b}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(arctg\,\mathbf{1} - arctg\ (a+\mathbf{1})\right) +$$

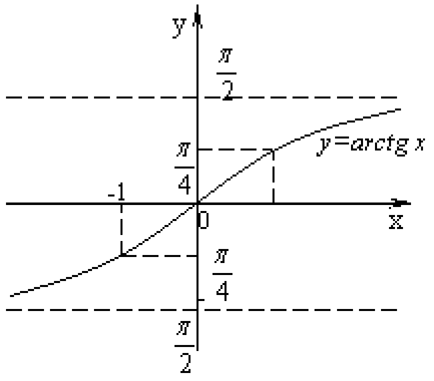


Рис. 234

$$+\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\,(b+1)-\operatorname{arctg}\,1\right)=\left[\begin{array}{l}\text{як відомо}\quad \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\,(a+1)\right)=-\frac{\pi}{2},\\ \text{а}\quad \lim\limits_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\,(b+1)\right)=\frac{\pi}{2}\quad (\text{рис.}234)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi.$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ збігається. ▼

У розглянутих вище прикладах невласні інтеграли обчислювали за його означенням. Проте інколи досить знати, збіжний чи розбіжний невласний інтеграл і немає необхідності його обчислювати.

Розглянемо деякі ознаки збіжності невласних інтегралів (сформулюємо їх для невласних інтегралів з нескінченною верхньою межею).

Теорема 2. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$, $q(x)$ неперервні і задовольняють умову $0\le f(x)\le q(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}q(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$, а із розбіжності $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty}q(x)\,dx$.

Теорема 3. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{q(x)}=c$, $0<c<+\infty$, $(f(x)>0,\ q(x)>0)$, то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ і $\int\limits_a^{+\infty}q(x)\,dx$ обидва збіжні, або обидва розбіжні.

Приклад № 33. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ dx}{(1+x)^3}.$

▲ Маємо $f(x)=\frac{x}{(1+x)^3}=\frac{1}{\frac{1+x}{x}\cdot(1+x)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^2}\sim\frac{1}{(1+x)^2}$ при $x\to\infty.$

Позначимо $q(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$. Функції $f(x)$ і $q(x)$ задовольняють умовам теореми 2:
1) $0\le f(x)\le q(x)$ для $x\in[0;+\infty)$;

2) $q(x)>0$ при $x\in[0;+\infty)$ і $\int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x)^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b(1+x)^{-2}dx=$

$=-\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{1+b}+1\right)=1$.

Отже, $\int\limits_0^{+\infty} q(x)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x)^2}$ збіжний. Тоді за теоремою 2 $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\,dx}{(1+x)^3}$ також збіжний. ▼

В попередніх теоремах вивчалися невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли функція $f(x)$ є знакозмінна, має місце наступне твердження.

Теорема 4. Якщо $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ збіжний, то збігається також $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Приклад № 34. Дослідити на збіжність $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{2+4\sin x}{x^4}\,dx.$

▲ Маємо $f(x)$–знакозмінна функція. Оскільки $\left|\dfrac{2+4\sin x}{x^4}\right|\le\dfrac{6}{x^4}$ і $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{6}{x^4}dx=6\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-4}dx=6\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3x^3}\Big|_1^b\right)=-2\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{b^3}-1\right)=2,$

тоді, за теоремою 4, заданий інтеграл збіжний.

Зауваження. 1. Із збіжності $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$.

Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ також збіжний, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ***збіжний абсолютно***.

2. Теореми 2–4 залишаються справедливими і для невласних інтегралів (2.14), (2.15).

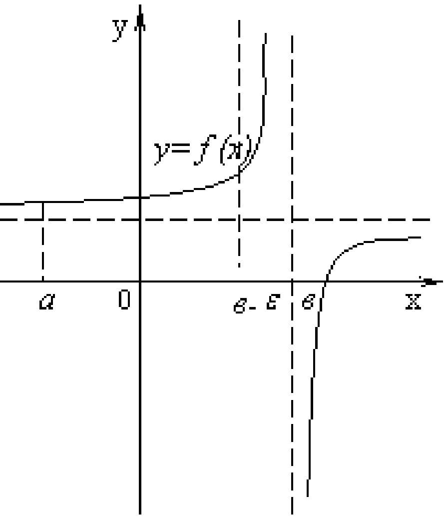


Рис. 235

12.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

◐ а) Нехай функція $f(x)$ задана на скінченному проміжку $[a;b]$, але необмежена на ньому. Допускаємо, що $f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $[a;b]$, крім точки b, в якій вона має нескінченний розрив. Тоді на проміжку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$, функція $f(x)$ буде неперервною (рис.235).

<u>*Означення 5*</u>. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) визначеного інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to 0$, то ця границя називається ***невласним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

Отже,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (2.16)$$

<u>*Означення 6.*</u> Якщо границя (2.16) – скінченна, то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо границя нескінченна $(+\infty$ чи $-\infty)$, або не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Приклад № 35. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

▲
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{функція } \; f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{розривна в точці } \; x=1 \\ \text{і } \; \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ збігається. ▼

Приклад № 36.

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}.$$

▲ $$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \left[\begin{array}{l} \text{функція } \ f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}} \ \text{ визначена} \\ \text{при } 3-x>0, \text{тобто} \\ \text{для } x<3. \text{ В точці } \ x=3 \\ \text{вона розривна} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{-d(3-x)}{\sqrt{3-x}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{d(3-x)}{2\sqrt{3-x}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{3-x}\,\Big|_2^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{3-(3-\varepsilon)}-\sqrt{3-2}\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}+2 = 2.$$

Отже, інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ збігається. ▼

Приклад № 37. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$.

▲ $$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} = \left[\begin{array}{l} \text{функція } \ f(x)=\frac{1}{x^3} \ \text{ в точці} \\ x=0 \quad \text{невизначена і} \quad \text{має} \\ \text{в цій точці розрив} \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-3}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{(-1)^2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2} = -\infty.$$

Отже, інтеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$ розбігається. ▼

Приклад № 38.

Дослідити на збіжність інтеграл
$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)\,x^2}}$.

▲ $$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)\,x^2}} = \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} \quad \text{невизначена} \\ \text{в точці } \ x=1 \quad \left(1\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)\,x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1/2}^{1-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Обчислимо невизначений інтеграл $\int x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$. Маємо інтеграл від диференціального бінома

$$m=-\frac{2}{3},\quad n=1,\quad p=-\frac{1}{3},$$
$$a=1,\quad b=-1;$$
$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx=\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{2}{3}+1}{1}-\frac{1}{3}=0-\text{ціле;}\quad \text{позначимо}\ =$$
$$z^3=\frac{1}{x}-1;\quad \frac{1}{x}=z^3+1,\quad x=\frac{1}{z^3+1},$$
$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1};\quad dx=-\frac{3z^2dz}{(z^3+1)^2}$$
$$=\int (z^3+1)^{2/3}\ \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{z^3+1}}}\cdot\left(-\frac{3z^2}{(z^3+1)^2}\right)dz=-3\int\frac{z^2}{z(z^3+1)}dz=$$
$$=-3\int\frac{z}{z^3+1}dz=-3\int\frac{z}{(z+1)(z^2-z+1)}dz=\text{[з приклада №29]}=$$
$$=-3\left(\int\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{dz}{z+1}+\int\frac{1}{3}\cdot\frac{z+1}{z^2-z+1}\ dz\right)=\int\frac{dz}{z+1}-\int\frac{z+1}{z^2-z+1}dz=$$
$$=\ln\,|z+1|-\int\frac{\frac{1}{2}(2z-1+1)dz}{z^2-z+1}-\int\frac{dz}{z^2-z+1}=\ln\,|z+1|-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{2z-1}{z^2-z+1}dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-z+1}-\int\frac{dz}{z^2-z+1}=\ln\,|z+1|-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2-z+1)}{z^2-z+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{\left(z^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}=\ln\,|z+1|-$$
$$-\frac{1}{2}\ln(z^2-z+1)-\frac{3}{2}\int\frac{d(z-1)}{\left(z^2-2z\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\ln\,|z+1|-$$
$$-\frac{1}{2}\ln(z^2-z+1)-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=\left[z=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\right]=$$
$$=\ln\frac{\left|\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1\right|}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1}}-\sqrt{3}\,arctg\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1/2}^{1-\varepsilon}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{1-\varepsilon}-1}+1}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1-\varepsilon}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{1-\varepsilon}-1}+1}}\right|-\right.$$

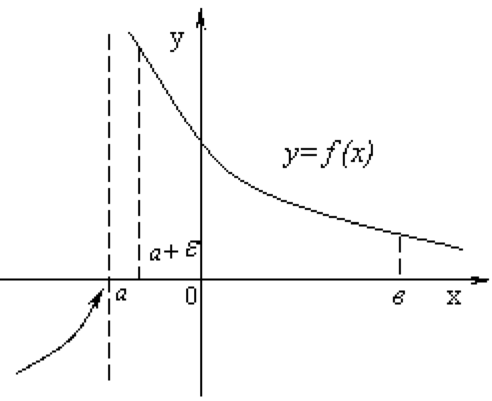


Рис. 236

$$-\ln\frac{\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{1}+1}}-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{1-\varepsilon}-1}-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{1}-1}{\sqrt{3}})=$$

$$=\ln 1-\ln 2-\sqrt{3}\,arctg\,\frac{-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}=-\ln 2+$$

$$+\sqrt{3}\left(arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}-arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=-\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2.$$

Інтеграл $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)x^2}}$ збігається. ▼

◐ б) Аналогічно, якщо $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x=a$ (рис.236), тоді $f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $[a+\varepsilon;\ b]$, де $0<\varepsilon<b-a$ і невласний інтеграл запишеться у вигляді

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx. \qquad (2.17)$$

Приклад № 39. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

▲ $$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\left[\begin{array}{ll}\mathbf{\ln 1=0,} & \textbf{тому функція}\\ \dfrac{\mathbf{1}}{x\sqrt{\ln x}} & \textbf{невизначена при } x=\mathbf{1}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbf{2}\sqrt{\ln e}-\mathbf{2}\sqrt{\ln(\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon})}\right)=\mathbf{2}.$$

Отже, невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ збігається. ▼

Приклад № 40. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx.$$

▲ $$\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{функція } f(x)=x\ln x\\ \text{невизначена при } x=0\\ \text{і має в точці } x=0 \text{ розрив}\end{array}\right]=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ d\nu = x\,dx & \nu=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon + \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2\ln\varepsilon + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-2}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$ [за правилом Лопіталя]= $= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{(\ln\varepsilon)'}{(\varepsilon^{-2})'} =$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\,(-2\varepsilon^{-3})} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{+2}}{2} = 0.$$

Тоді $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}$.

Цей інтеграл збігається. ▼

◐ в) Функція $f(x)$ має нескінченний розрив у внутрішній точці c з відрізка $[a;b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \qquad (2.16)$$

в точці $x=1$ функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$ розривна

Приклад № 41. Обчислити невласний інтеграл $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2-2x+1}$.

▲ $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2-2x+1} =$

$$= \int_0^1\frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$

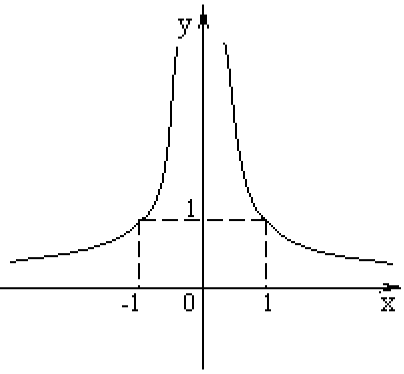


Рис. 237

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{-1}{x-1}\right|_0^{1-\varepsilon} - \left.\frac{1}{x-1}\right|_{1+\varepsilon}^{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = -2+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\varepsilon} = \infty.$$

Отже, інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+1}$ розбігається. ▼

Приклад № 42. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

▲ Графік функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, яка розривна в точці $x=0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$, має вигляд (рис.237). Тому $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} x^{-2/3}dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1} x^{-2/3}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{x^{1/3}}{1/3}\right|_{-1}^{-\varepsilon} + \left.\frac{x^{1/3}}{1/3}\right|_{\varepsilon}^{1}\right) = 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon}-\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = 3\left(1+1\right) = 6.$$

Отже, інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ збігається. ▼

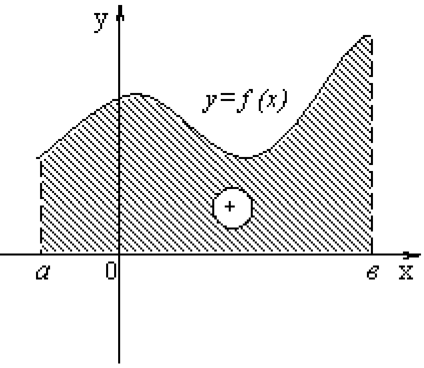


Рис. 238

§ 13. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР

13.1. Задання кривої в декартовій системі координат

Площу криволінійної фігури можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла, використовуючи його геометричний зміст.

◐ 1. Нехай неперервна на $[a;b]$ функція $f(x)\ge 0$, тоді площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і віссю OX (рис.238) визначається за формулою

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.19)$$

Приклад № 45. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=\frac{1}{x}$, віссю OX і прямими $x=1,\quad x=2$.

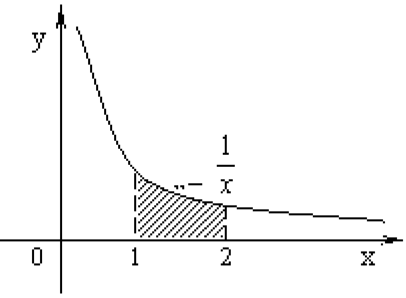


Рис. 239

▲ Побудуємо фігуру, площу якої треба обчислити (рис.239), застосовуючи формулу (6.19), дістанемо

$$S=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

(од.^{2}). ▼

◐ 2. Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)\le 0$, то криволінійна трапеція лежить під віссю OX (рис.240), а інтеграл недодатний. Тоді площа такої криволінійної трапеції дорівнює абсолютній величині визначеного інтеграла

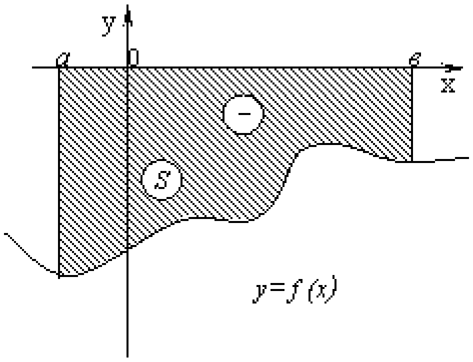


Рис. 240

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{2.20}$$

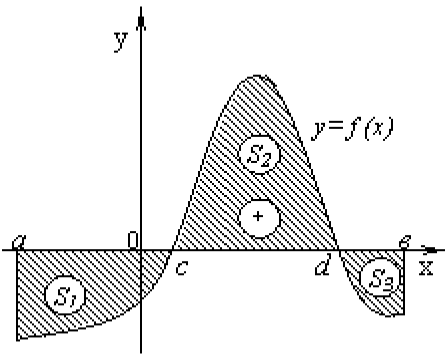


Рис. 241

◐ 3. Нехай функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ змінює знак і число змін знака скінченне, тобто графік функції перетинає вісь OX скінченне число раз, наприклад, в точках $x=c$ і $x=d$ (рис.241). Площа такої фігури обчислюється за допомогою суми інтегралів, застосовуючи відповідно формули (2.19) і (6.20):

$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\int_c^d f(x)\,dx+\left|\int_d^b f(x)\,dx\right|. \tag{2.21}$$

◐ 4. В більш загальному випадку фігура може бути обмежена на відрізку $[a;b]$ графіками двох функцій. Нехай фігура обмежена графіками функцій $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ і

прямими $x=a$, $x=b$, причому $f(x)\ge\varphi(x)$. Щоб обчислити площу фігури $ABDC$ (рис.242) за допомогою визначеного інтеграла, необхідно цю площу виразити через площі криволінійних трапецій.

З рисунка 242 знайдемо, $S_{ABDC}=S_{aABb}-S_{aCDb}$, звідки

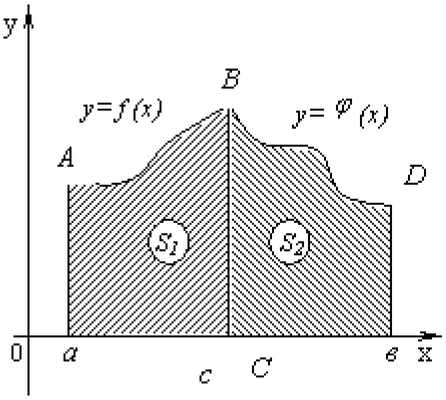


Рис. 243

$$S_{ABDC} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \boldsymbol{\varphi}(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)\big)\,dx. \qquad (2.22)$$

Зауваження. Формула (2.22) справедлива незалежно від того, де знаходиться графік функції $y = \varphi(x)$ відносно осі OX, аби тільки між функціями $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a; b]$ виконувалася умова $f(x) \geq \varphi(x)$.

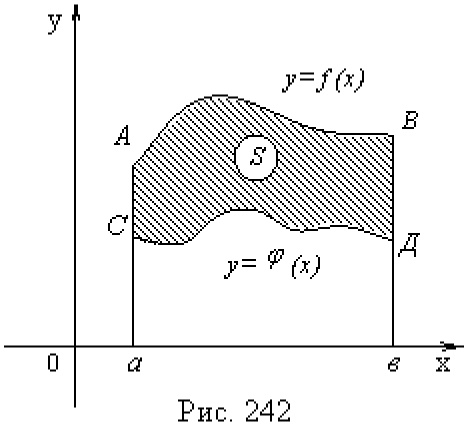


Рис. 242

◐ 5. Нехай фігура обмежена графіками функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, які перетинаються в деякій точці з абсцисою $x = c$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю OX (рис.242) $c \in (a; b)$. З рисунка 243 знаходимо

$$S_{aABDb} = S_{aABC} + S_{cBDb} = S_1 + S_2,$$

звідки

$$S_{aABDb} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \boldsymbol{\varphi}(x)\,dx. \qquad (2.23)$$

Формули (6.19)-(6.23) не змінюють свого вигляду і залишаються справедливими і в тому випадку, коли фігура обмежена:

◐ 6. Графіком неперервної на відрізку $[c; d]$ функції $x = q(y)$, прямими $y = c$, $y = d$, а змінною інтегрування є змінна y (рис.244).

◐ 7. Нехай фігура обмежена прямими $y=c$, $y=d$ і кривими $x=q(y)$, $x=\eta(y)$ (рис.245), тобто тут y – незалежна змінна, а x – функція. Тоді площа обчислюється за формулою

$$S=\int_c^d \eta(y)\,dy-\int_c^d q(y)\,dy=\int_c^d\left(\eta(y)-q(y)\right)dy. \tag{2.24}$$

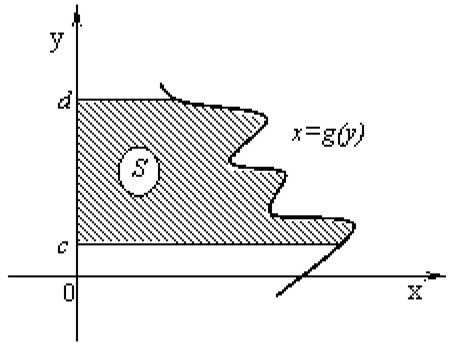


Рис. 244

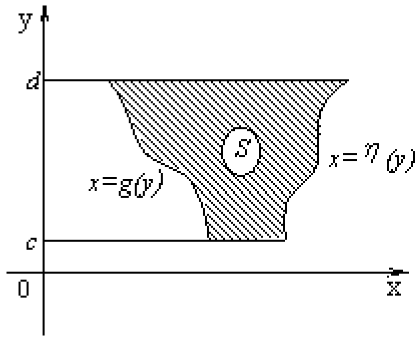


Рис. 245

В простіших випадках, при застосуванні визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур можна скористатися наступною схемою:

1. В прямокутній системі координат побудувати графіки заданих функцій і знайти фігуру, площу якої необхідно обчислити.
2. Знайти абсциси (ординати) точок перетину ліній і визначити межі інтегрування, для чого розв’язати відповідні системи рівнянь.
3. Виразити площу фігури через площі криволінійних трапецій, записати знайдену формулу у вигляді визначених інтегралів і обчислити їх.

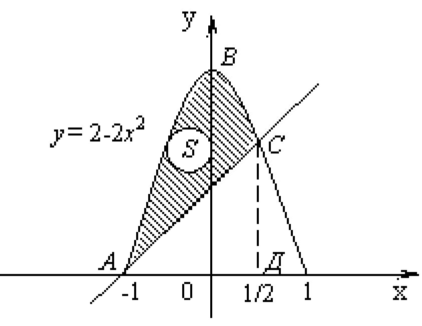


Рис. 246

Приклад № 46. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x-y+1=0$ і $2x^2+y-2=0$.

▲ В прямокутній системі координат будуємо параболу $x^2=-\frac{1}{2}(y-2)$ і пряму $x-y+1=0$. Фігура ABC, площу якої треба знайти, заштриховано на рис.246. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x^2+y-2=0,\\ x-y+1=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

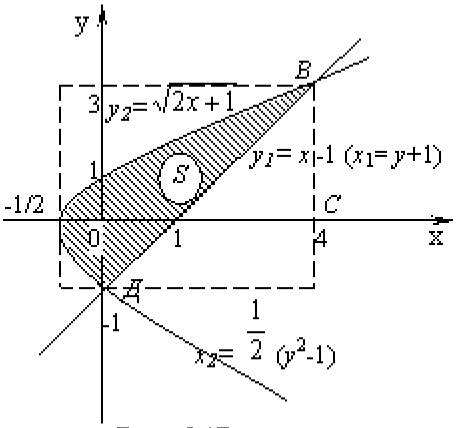


Рис. 247

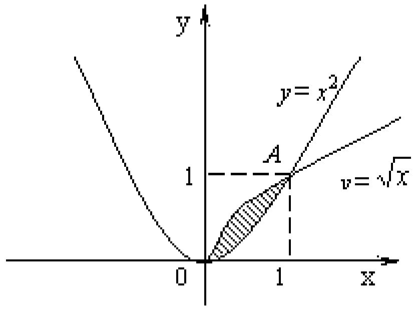


Рис. 248

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-2x^2, \\ x-2+2x^2+1=0, \end{cases} \quad \Big| \, 2x^2+x-1=0,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Маємо абсциси точок перетину параболи і прямої: $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$. Виразимо площу фігури ABC через площі криволінійних трапецій

$$S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ACD} = \int_{-1}^{1/2} \left(2-2x^2-(x+1)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1/2} \left(-2x^2-x+1\right)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1/2} = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} - (-1) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8} \text{(од.}^2\text{)} \blacktriangledown$$

Приклад № 47.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x+1, \; x-y=1.$

▲ 1. Будуємо графіки параболи і прямої: $y_1 = x-1; \; y_2 = \pm\sqrt{2x+1}$ (рис.247).

2. Знайдемо точки перетину кривих $y_1(x)$ і $y_2(x)$ та межі інтегрування:

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ y = x-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1, \\ x^2-2x+1 = 2x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1, \\ x^2-4x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1, \\ x(x-4)=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases} \end{array}\right. \quad D(0;-1), \quad B(4;3)$$ – точки перетину.

3. Площа заштрихованої фігури: $\left(x_1 = y+1; \quad x_2 = \dfrac{y^2-1}{2}\right)$

$$S = \int_{-1}^{3} \left(x_1(y) - x_2(y)\,dy\right) = \int_{-1}^{3} \left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{6}\cdot 27 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{3} \text{ (од.}^2\text{)}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 48.

Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

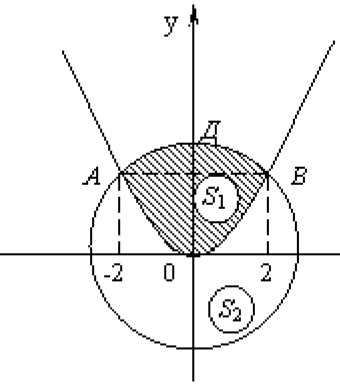


Рис. 249

▲ 1. Побудуємо лінії $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$ (рис.248).

2.Знаходимо точки перетину кривих та межі інтегрування:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ \sqrt{x}=x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ x-x^4=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-x^3\right)=0, \\ y=\sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=1. \end{cases} \end{array}\right. \quad O(0;\,0),\quad A(1;\,1)$$ – точки перетину.

3. Площа заштрихованої фігури: $$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ (од.^{2}).▼

Приклад № 49.

Коло $x^2+y^2=8$ розділене параболою $y=\frac{1}{2}x^2$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

▲ Побудуємо лінії $x^2+y^2=8$ і $y=\frac{1}{2}x^2$ (рис.249).

2. Визначимо координати точок перетину кривих:

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=\dfrac{1}{2}x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=8-y^2, \\ y=\dfrac{8-y^2}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=8-y^2, \\ y^2+2y-8=0, \end{cases} \quad \left|\begin{array}{l} y_1=2, \\ y_2=-4, \end{array}\right. \quad (y\ge 0) \begin{cases} y_1=2, \\ x=\pm\sqrt{8-4}=\pm 2. \end{cases}$$

$A(-2;\,2),\quad B(2;\,2)$ – точки перетину кривих $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\sqrt{8-x^2}$.

3. Обчислимо площі S_1 та S_2 (рис.249):

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{x^3}{6}\Bigg|_{-2}^{2}=\left[\begin{array}{lll} x=\sqrt{8}\,\sin t, & t=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{8}}, & \\ dx=\sqrt{8}\,\cos t\,dt & & \\ x & -2 & 2 \\ t & -\dfrac{\pi}{4} & \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right]=$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\,\sqrt{8}\,\cos t\,dt-\frac{1}{6}\left(8-(-8)\right)=$$

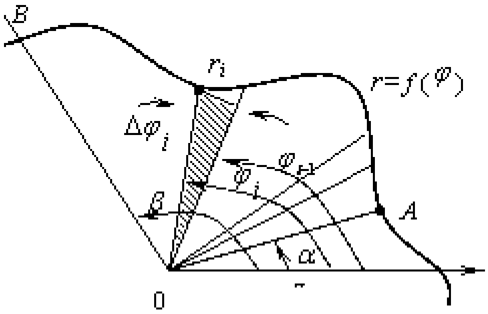


Рис. 250

$$= 8\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 dt - \frac{8}{3} = 8\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt - \frac{8}{3} = 4\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} -$$

$$\frac{8}{3} = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi; \qquad S_1 = \left(\frac{4}{3}+2\pi\right) \text{ (од.}^2\text{).}$$

$$S_2 = S_k - S_1 = \pi\left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}+2\pi\right) = 8\pi - \frac{4}{3} - 2\pi = \left(6\pi - \frac{4}{3}\right) \text{ (од.}^2\text{).} \quad \blacktriangledown$$

13.2. Площа криволінійного сектора в полярних координатах

Означення 7. ***Криволінійним сектором*** називається фігура, яка обмежена двома променями, що виходять з однієї точки, і кривою, яка перетинає задані промені (рис.250).

Нехай рівняння кривої в полярній системі координат має вигляд $r = f(\varphi)$, а рівняння променів – $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$. Визначимо площу сектора AOB. Для цього розіб'ємо сектор на n частинних секторів променями

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Позначимо $r_i = f(\varphi_i)$ – полярний радіус, який відповідає полярному куту φ_i. Кут між двома сусідніми променями позначимо через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, замінимо кожний криволінійний сектор (частинний) круговим сектором з радіусом r_i і центральним кутом $\Delta\varphi_i$, тоді його площа S_i визначатиметься за формулою

$$S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i,$$

а вся площа фігури, складеної з кругових секторів

$$S_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i)\cdot\Delta\varphi_i.$$

Ця сума інтегральна для функції $f^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, тому її границя при $\Delta\varphi_i \to 0$, якщо вона існує і скінченна, є визначеним інтегралом, який виражає площу криволінійного сектора

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi \tag{2.25}$$

Приклад № 50

Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $\left(x^2+y^2\right)^2=4xy$.

▲ Цю задачу доцільно розв'язувати в полярних координатах, які зв'язані з декартовими наступними рівностями $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

Підставимо їх в рівняння лемніскати, одержимо

$r^4=4r^2\sin\varphi\cos\varphi,$ звідки $r=\sqrt{2\sin 2\varphi}.$

1. Будуємо графік. Область визначення знаходимо з умови $2\sin 2\varphi\geq 0$ (оскільки радіус r не може бути від'ємним):

$$\sin 2\varphi\geq 0:\quad 2\pi k\leq 2\varphi\leq \pi+2\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

$$\pi k\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots$$

Область визначення розбивається на сектори в залежності від значень k. Випишемо ці сектори:

$k=0:\qquad 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2},$

$k=1:\qquad \pi\leq\varphi\leq\dfrac{3}{2}\pi,$

$k=2:\qquad 2\pi\leq\varphi\leq\dfrac{5}{2}\pi.$

Сектор при $k=2$ співпадає з сектором при $k=0$, а при $k=3$ – з сектором при $k=1$ і т.ін. Іншими словами, різних секторів буде тільки два. Зовні від цих секторів $r<0$ і графік кривої не існує.

$\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:	φ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/12$
	r	0	1	$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{3}$	1	0

$\left[\pi;\dfrac{3}{2}\pi\right]$:	φ	π	$13\pi/12$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$17\pi/12$	π
	r	0	1	$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{3}$	1	0

Проводимо промені, що виходять з початку координат під кутами $0;\ \pi/12;\ \pi/6;\ \ldots,\pi$ (див.таблицю).

На кожному промені відкладаємо відрізок довжиною r, що відповідає даному значенню φ з таблиці. Одержані на променях точки з'єднуємо суцільною лінією, одержимо замкнену криву (рис.251).

2. Шукана площа складається з двох однакових фігур, заштрихованих на рисунку. Тому досить знайти площу однієї фігури і помножити її на 2:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}r^2\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}2\sin 2\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d(2\varphi)=-\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=$$

$= -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$ ▼

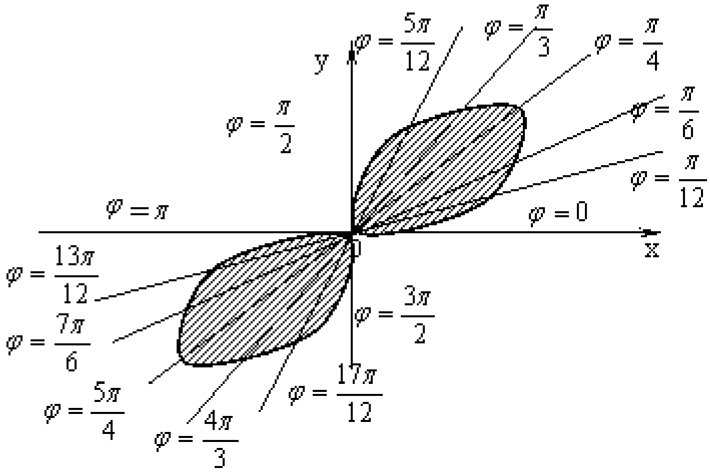


Рис. 251

Приклад № 51. Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$r = 2\cos\varphi, \quad r = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2.$$

▲ 1. Побудуємо фігуру, площу якої потрібно обчислити. За умовою, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, то $r = 2\cos\varphi \ge 0,\ r = 2\sin\varphi \ge 0$.

$r = 2\cos\varphi$:	φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	r	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

$r = 2\sin\varphi$:	φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

Аналогічно, як і в попередньому прикладі, будуємо криві $r_1 = 2\sin\varphi,\ r_2 = 2\cos\varphi$ (рис.252).

2. Дістали фігуру, симетричну відносно променя $\varphi = \pi/4$. Тому шукана площа

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r_1^2\, d\varphi = \int_0^{\pi/4} 4\sin^2\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ (од.}^2\text{)}.$$ ▼

Приклад № 52.
Обчислити площу фігури, обмеженої

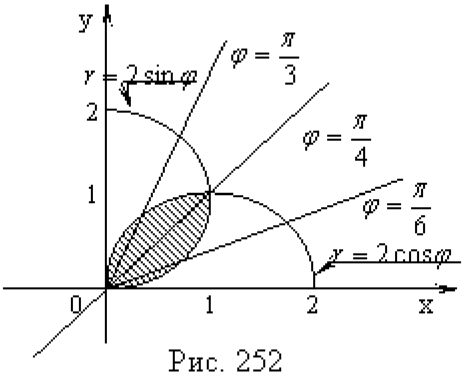


Рис. 252

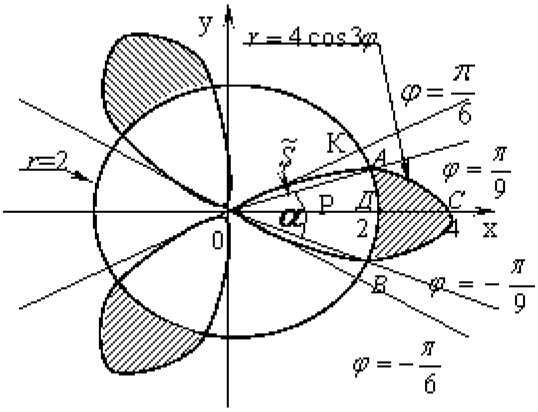


Рис. 253

лініями $r=4\cos 3\varphi,\quad r=2\quad (r\geq 2)$.

▲ 1. Будуємо графіки заданих ліній. $r=2$ – коло радіуса 2. Область визначення лінії $r=4\cos 3\varphi$ знаходимо з умови $4\cos 3\varphi\geq 0$:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z;-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n,\quad n\in Z.$$

Область визначення розбивається на сектори

$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5}{6}\pi\right]\cup\left[\frac{7}{6}\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ (рис.253), які знаходяться так само, як у прикладах № 50, № 51.

Шукана площа $S=S_2-\overline{S_2}$, де S_2 – площа 3-х пелюсток, $S_2=3S_1$, де S_1 – площа однієї пелюстки; $\overline{S_2}=3\tilde{S}_1=6\tilde{S}+3S_{\text{сект.}}$, де $\tilde{S}$ – площа фігури $OKAP$ (рис.253).
Маємо

$$S_2=3S_1=6\int_0^{\pi/6}(4\cos 3\varphi)^2d\varphi=6\cdot 16\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\,d\varphi=$$

$$=48\int_0^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)\;d\varphi=48\left(\varphi+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=$$

$$=48\left(\pi/6+\frac{1}{6}\sin\pi\right)=8\pi,$$

$$S_{\text{сект.}}=\frac{\alpha r^2}{360^0}=\left[\alpha=\frac{2\pi}{9}=40^0;\,r^2=4\right]=\frac{40^0\cdot 4}{360^0}=\frac{4}{9};\;3S_{\text{сект.}}=3\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3};$$

$$\tilde{S}=\int_{\pi/9}^{\pi/6}(4\cos 3\varphi)^2d\varphi=16\int_{\pi/9}^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\,d\varphi=8\int_{\pi/9}^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)d\varphi=$$

$$=8\left(\varphi+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{\pi/9}^{\pi/6}=8\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{6}\sin\pi-\frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=8\left(\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=4\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right);$$

$$6\tilde{S}=24\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=8\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right).$$

Тоді

$$\overline{S_2}=3\,S_{\text{сект.}}+6\,\tilde{S}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)=\frac{4}{3}\left(1+2\pi-3\sqrt{3}\right),$$

а $S=S_2-\overline{S_2}=8\pi-\frac{4}{3}\left(1+2\pi-3\sqrt{3}\right)=\frac{24\pi-4-8\pi+12\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}\left(4\pi+3\sqrt{3}-1\right)$ (од.^{2}). ▼

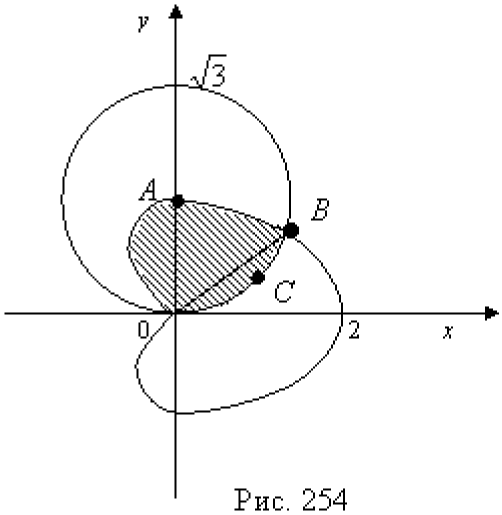


Рис. 254

Приклад № 53. Знайти площу фігури, яка вирізана з кардіоїди $\rho=1+\cos\theta$ колом $\rho=\sqrt{3}\sin\theta$.

▲ $\rho=\sqrt{3}\sin\theta,\quad 0\le\theta\le\pi$:

θ	ρ
0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{6}/2$
$\pi/3$	1,5
$\pi/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2+\pi/6$	$3/2$
$\pi/2+\pi/4$	$\sqrt{6}/2$
$\pi/2+\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
π	0

$\rho=1+\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$:

θ	ρ	θ	ρ
0	2	$\pi+\pi/6$	$1-\sqrt{3}/2$
$\pi/6$	$1+\sqrt{3}/2$	$\pi+\pi/4$	$1-\sqrt{2}/2$
$\pi/4$	$1+\sqrt{2}/2$	$\pi+\pi/3$	$1/2$
$\pi/3$	1,5	$3\pi/2$	1

$\pi/2$	1	$3\pi/2+\pi/6$	1,5
$\pi/2+\pi/6$	$1/2$	$3\pi/2+\pi/4$	$1+\sqrt{2}/2$
$\pi/2+\pi/4$	$1-\sqrt{2}/2$	$3\pi/2+\pi/3$	$1+\sqrt{3}/2$
$\pi/2+\pi/3$	$1-\sqrt{3}/2$	2π	2
π	0		

Знайдемо координати точок перетину цих кривих:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{3}\sin\theta,\\ \rho=1+\cos\theta\end{cases}\quad 0\le\theta\le\pi.$$

$1+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$, $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=1;$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)=1;\quad \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\theta-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z.\quad \theta=\left((-1)^k+1\right)\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z.$$

$k=0:\ \theta=\dfrac{\pi}{3};$ $k=1:\ \theta=\pi,$ $k=2:\ \theta=2\pi+\dfrac{\pi}{3};$ $\theta=\dfrac{\pi}{3};$ $k=3:\ \theta=3\pi,$ $\theta=\pi.$

Фігура, площу якої треба знайти, складається з двох фігур: $OCBO$ і $OBAO$. У першому випадку кінець радіуса-вектора лежить на колі, у другому -на кардіоїді.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}\cdot3\int_0^{\pi/3}\sin^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos2\theta)d\theta+\frac{1}{2}(\theta+2\sin\theta)\Big|_{\pi/3}^{\pi}+\frac{1}{4}\int_{\pi/3}^{\pi}(1+\cos2\theta)d\theta=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi/3}+\frac{1}{2}\left(\pi+2\sin\pi-\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi}=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}-$$

$$-\frac{1}{8}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}\left(\pi-\sqrt{3}\right).$$ ▼

13.3. Параметричне задання кривої

Розглянемо випадок, коли крива, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями

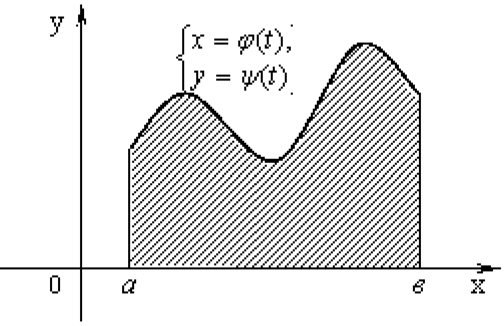


Рис. 255

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta, \tag{2.26}$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні функції і мають неперервні похідні $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Знайдемо площу криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю OX і кривою (6.26), причому $x\big|_{t=\alpha} = a$, $y\big|_{t=\beta} = b$ (рис.255). В цьому випадку можна скористатися відомою формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)\,dx(t).$$

Фактично, ми вводимо заміну змінної в інтегралі (6.19):

$x = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad t = \varphi^{-1}(x)$

$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt, \quad t\big|_{x=a} = \alpha,$

$y = \psi(t), \qquad t\big|_{x=b} = \beta$.

Тоді

дістанемо
$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{2.27}$$

Приклад № 54. Знайти площу фігури, обмеженої віссю OX і однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

▲ Побудуємо циклоїду по точках, враховуючи її неперервність:

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	0	$a\left(\pi/6 - 1/2\right) \approx 0{,}02a$	$a\left(\pi/4 - \sqrt{2}/2\right) \approx 0{,}09a$	$\approx 0{,}19a$	$\approx 0{,}57a$

y	0	$a\left(1-\sqrt{3}/2\right)\approx 0{,}15a$	$a\left(1-\sqrt{2}/2\right)\approx 0{,}3a$	$\approx 0{,}5a$	$\approx a$

t	$\frac{2}{3}\pi$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$\pi+\pi/6$	$\pi+\pi/4$
x	$\approx 1{,}05a$	$\approx 1{,}65a$	$\approx 2{,}12a$	$\approx 3{,}4a$	$\approx 4{,}17a$	$\approx 4{,}63a$
y	$1{,}5a$	$\approx 1{,}7a$	$\approx 1{,}85a$	$2a$	$\approx 1{,}85a$	$\approx 1{,}7a$

t	$\pi+\pi/2$	$\pi+3\pi/4$	$\pi+5\pi/6$	2π
x	$\approx 5{,}71a$	$\approx 6{,}2a$	$\approx 6{,}26a$	$\approx 6{,}28a$
y	a	$\approx 0{,}3a$	$\approx 0{,}15a$	0

Арка циклоїди (рис.256) стоїть кінцями на осі OX при $t=0$ і $t=2\pi$, тобто $y\big|_{t=0}=0$ і $y\big|_{t=2\pi}=0$. Ці значення t будуть межами інтегрування.

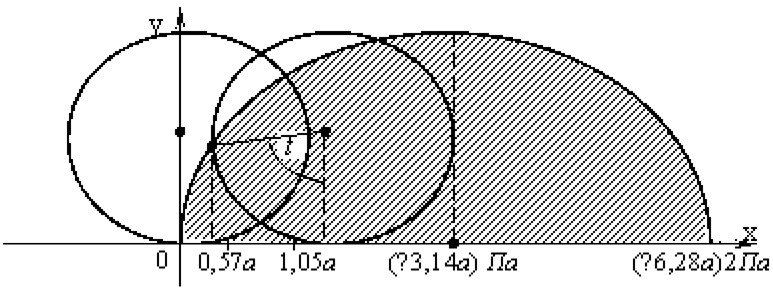


Рис. 256

Якщо t змінюється від 0 до 2π, то x зростає від 0 до $2\pi a$.

За формулою (6.27), маємо:

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,d\left(a(t-\sin t)\right)=a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=a^2\ (t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=a^2(2\pi-2\sin 2\pi)+$$

$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left(2\pi+\frac{1}{2}\sin 4\pi\right)=3\pi a^2$$

(од.^{2}). ▼

Зауваження. Якщо t зростає від α до β, то і $x(t)$ зростає від a до b (рис.255). Якщо ж при зростанні t від α до β, $x(t)$ буде спадати від b до a, тобто $\varphi'(t)<0,\quad t\in[\alpha;\,\beta]$, то справедлива формула

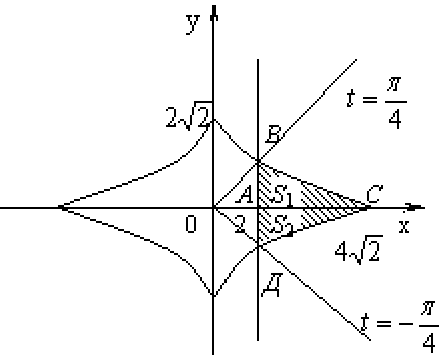


Рис. 257

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2.28}$$

Приклад № 55. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t$ та прямою $x=2\ \ (x\ge 2)$.

▲ Маємо $S=S_1+S_2$, де $S_1=S_{ABC},\, S_2=S_{ACD}$ (рис.257).

S_1 визначаємо за формулою (6.28), оскільки при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{4}$ функція $x(t)$ спадає від $4\sqrt{2}$ до 1; S_2 визначається за формулою (6.27), бо при зростанні t від $-\frac{\pi}{4}$ до 0 функція $x(t)$ також зростає. Отже,

$$S=-\int_0^{\pi/4}y(t)x'(t)\,dt+\int_{\pi/4}^{0}y(t)x'(t)\,dt.$$

Оскільки астроїда симетрична відносно осей OX і OY, то шукана площа S дорівнює $S=2S_1=-2\int_0^{\pi/4}y(t)x'(t)dt.$ Отже,

$$S=-2\int_0^{\pi/4}2\sqrt{2}\sin^3 t\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)dt=$$

$$=96\int_0^{\pi/4}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt=96\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=12\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2 2t)(1-\cos 2t)dt=12\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2 2t-\cos 2t+\cos^3 2t)dt=$$

$$=12\,(t\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/4}+$$

$$+\int_0^{\pi/4}\cos^2 2t\cdot\frac{1}{2}\,d(\sin 2t))=12\,(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\,+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\sin^2 2t)d(\sin 2t))=$$

$$=12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin 2t-\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Big|_0^{\pi/4}\right)=12\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\sin^3\pi/2}{3}\right)\right)=$$

$$=12\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)$$ (од.^{2}). ▼

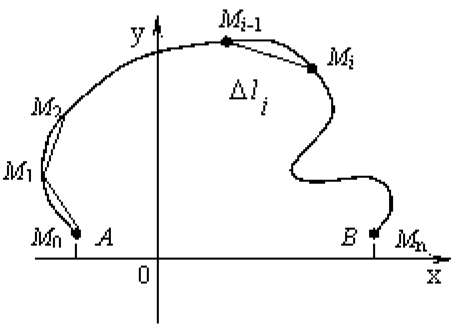


Рис. 258

§ 14. ДОВЖИНА ДУГИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Розглянемо деяку криву AB (рис.258). Візьмемо на AB точки $A=M_0,\ M_1,\ M_2,\dots,M_i,\dots,M_n=B$ і з'єднаємо їх

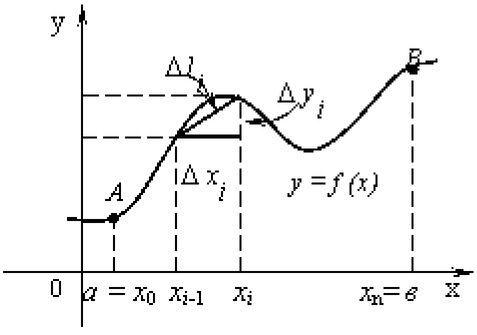


Рис. 258 а

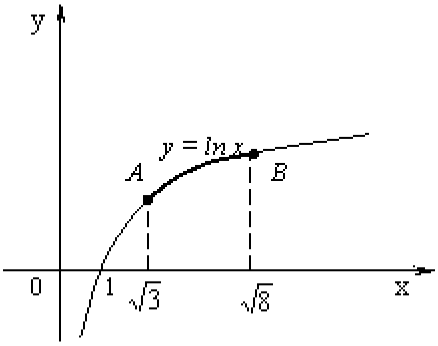


Рис. 259

послідовно прямолінійними відрізками, тоді одержимо ламану $M_0M_1M_2 \ldots M_n$, що вписана в криву AB. Позначимо $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$.

Означення 8.

Довжиною кривої AB називається границя, до якої прямує довжина ламаної при прямуванні до нуля найбільшої з довжин відрізків, якщо ця границя існує і не залежить від вибору точок на кривій:

$$l = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

14.1. Довжина дуги кривої в декартовій системі координат

Нехай крива AB задається рівнянням $y = f(x)$, причому функція $f(x)$ і її перша похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$.

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A = M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots,$ $M_n = B,$ які мають абсциси $a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots,\ x_n = b$. Відповідні їм ординати точок розбиття є $y_0 = f(x_0),$

$y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ (рис.258.а).

Проведемо через кожні дві послідовні точки розбиття хорду, побудуємо вписану ламану, довжина l_n якої складається з суми довжин гіпотенуз прямокутних трикутників з катетами $\Delta x_i,\ \Delta y_i$, тоді

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i.$$

Перейдемо до границі при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, знайдемо довжину кривої, яка виражається визначеним інтегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\ dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx. \qquad (2.29)$$

Приклад № 56. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln x$ (від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).

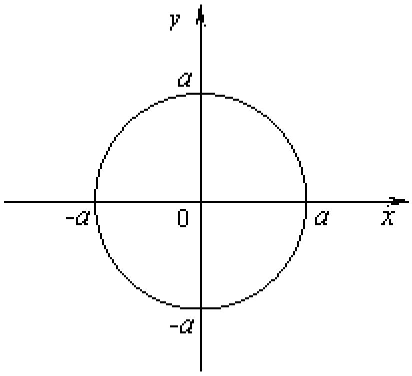


Рис. 260

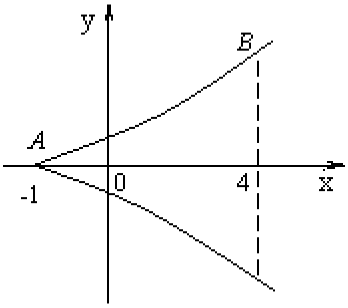


Рис. 261

▲ $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ (рис.259). $l=\int\limits_{\sqrt3}^{\sqrt8}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt3}^{\sqrt8}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=$

$$=\left[\begin{array}{lll} x^2+1=t^2, & x=\sqrt{t^2-1} & \\ dx=\dfrac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}; & x\ \ \sqrt3 & \sqrt8 \\ & t\ \ \ 2 & 3\end{array}\right]=\int\limits_2^3\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\,\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=\int\limits_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac12\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=3-2+\frac12\left(\ln\frac12-\ln\frac13\right)=1+\ln\sqrt{\frac32}$$ (од.^{2}).▼

Приклад № 57.

Знайти довжину дуги кривої $x^2+y^2=a^2$.

▲ $l=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ (рис.260).

Оскільки $y^2=a^2-x^2$, то $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Тоді

$$y'=\pm\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{\mp x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

і

$$l=2\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=2\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx=2a\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=2a\arcsin\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{a}=2a(\arcsin 1-\arcsin(-1))=2a\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\pi a.$$ ▼

Приклад № 58.

Знайти довжину дуги кривої $y^2=(x+1)^3$, яку відтинає пряма $x=4$.

▲ Довжина дуги $\breve{AB}$ (рис.261) визначається за формулою

$$|\breve{AB}|=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Оскільки $y^2=(x+1)^3$, то $y=\pm(x+1)^{3/2}$, тоді $y'=\frac32(x+1)^{1/2}$ (для $y\ge0$).

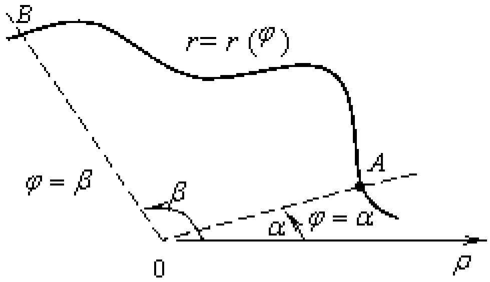


Рис. 262

$$l = 2\,|\breve{AB}| = 2\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\,dx = 2\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{4+9x+9}{4}}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{4}\sqrt{9x+13}\,dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{9x+13}\,\frac{d(9x+13)}{9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{(9x+13)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{2}{27}\left((9\cdot 4+13)^{3/2} - (9\cdot(-1)+13)^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{2}{27}\left(\sqrt{49^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{2}{27}\left(7^3 - 2^3\right) = 24\frac{22}{27}$$ (од.) .▼

14.2. Довжина дуги в полярних координатах

Нехай рівняння лінії задано в полярних координатах $r = r(\varphi)$ (рис.262). Щоб обчислити довжину дуги AB, скористаємося формулою

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \qquad (2.30)$$

Перейдемо в (6.30) від прямокутних до полярних координат за формулами $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. І, враховуючи, що r є функцією змінної φ, знайдемо диференціал дуги в
полярних координатах:

$$dx = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi, \quad dy = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$(dx)^2+(dy)^2 = ((r')^2\cos^2\varphi - 2\,r\,r'\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi +$$

$$+ (r')^2\sin^2\varphi + 2\,r\,r'\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi)(d\varphi)^2 =$$

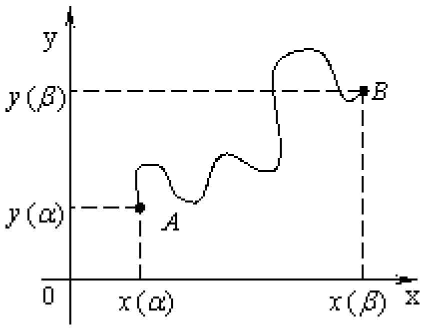
$$\left((r')^2+r^2\right)(d\varphi)^2; \qquad dl = \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Інтегруємо останню рівність від α до β, одержимо формулу довжини дуги в полярних координатах:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\boldsymbol{\varphi}. \qquad (2.31)$$

Приклад № 59. Знайти довжину дуги кривої $r = 1+\cos\varphi$

▲ 1. Область визначення: $r \ge 0;\ \ 1+\cos\varphi \ge 0;\ \ \cos\varphi \ge -1$, звідки випливає, що φ приймає довільні значення.



2. Оскільки $\cos\varphi$ – періодична і парна функція, то досить розглянути значення φ від 0 до π.

Рис. 264

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	…
r	2	$1+\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	$3/2$	1	$1/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{3}/2$	0	…

3. Будуємо графік (рис.263). Ця крива називається ***кардіоїдою***. Крива замкнена і симетрична. Тому знайдемо довжину верхньої дуги, а потім помножимо на 2.

Оскільки $r=1+\cos\varphi$, то $r'=-\sin\varphi$, тоді

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\left(\varphi/2\right)}\,d\varphi=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=8\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=8\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=8\sin\frac{\pi}{2}-8\sin 0=8$$ (од.) .▼

Приклад № 60.

Обчислити довжину дуги кривої $r=3e^{\frac{1}{4}\varphi}$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

▲ За формулою (6.31) маємо: $l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$ Оскільки $r=3e^{\frac{1}{4}\varphi}$, то $r'=\frac{9}{4}e^{\frac{1}{4}\varphi}$, тоді $r^2+(r')^2=9e^{\frac{6}{4}\varphi}+\frac{81}{16}e^{\frac{6}{4}\varphi}=\frac{225}{16}e^{\frac{6}{4}\varphi}=\frac{225}{16}e^{\frac{3}{2}\varphi}$.

Отже, $$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{15}{4}e^{\frac{1}{4}\varphi}\,d\varphi=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{\frac{3}{4}\varphi}\,d\left(\frac{3}{4}\varphi\right)=5e^{\frac{3}{4}\varphi}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=5\left(e^{\frac{3\pi}{8}}-e^{\frac{-3\pi}{8}}\right)$$ (од.) .▼

14.3. Довжина дуги кривої, заданої параметрично

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$.

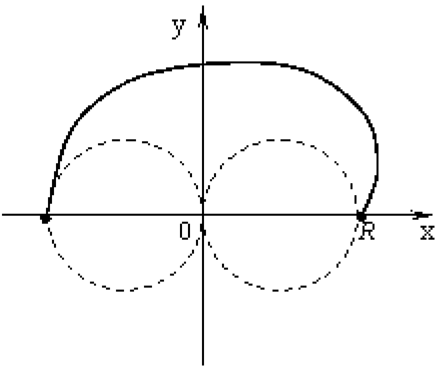


Рис. 265

Точки $A(x(\alpha), y(\alpha))$ і $B(x(\beta), y(\beta))$ – початок і кінець дуги AB відповідно (рис.264).

Нехай існують неперервні похідні $x'(t),\ y'(t), \alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$d\,l = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt,$$

а довжина l дуги $\breve{AB}$ обчислюватиметься за формулою

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (2.32)$$

Приклад № 61.

Знайти довжину дуги евольвенти кола

$$\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t), \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

▲ 1. $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ (рис.265);

$dx = R(-\sin t + \sin t + t\cos t)\,dt = Rt\cos t\,dt,$

$dy = R(\cos t - \cos t + t\sin t)\,dt = R\,t\sin t\,dt.$

$t \in \left[0;\ \pi/2\right]$	$t \in \left[\pi/2;\ \pi\right]$
$x \in \left[R;\ \pi/2\,R\right]$	$x \in \left[\pi R/2; -R\right]$
$y \in [0;\ R]$	$y \in [R;\ \pi R]$

$$l = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{R^2t^2\cos^2 t + R^2t^2\sin^2 t}\,dt = R\int\limits_0^{\pi} \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = R\int\limits_0^{\pi} t\,dt = R\,\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$= \frac{1}{2}R\pi^2$ (од.) .▼

§ 15. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМІВ ТІЛ

Задача обчислення об’ємів тіл довільної форми, в загальному випадку, за допомогою визначеного інтеграла не розв’язується. Ця задача буде розв’язана за допомогою подвійного інтеграла, який вивчатиметься в частині II посібника. Ми розглянемо два частинних випадки форми тіл, об’єми яких знаходяться за допомогою визначеного інтеграла.

15.1. Обчислення об’єму тіла за відомими поперечними перерізами

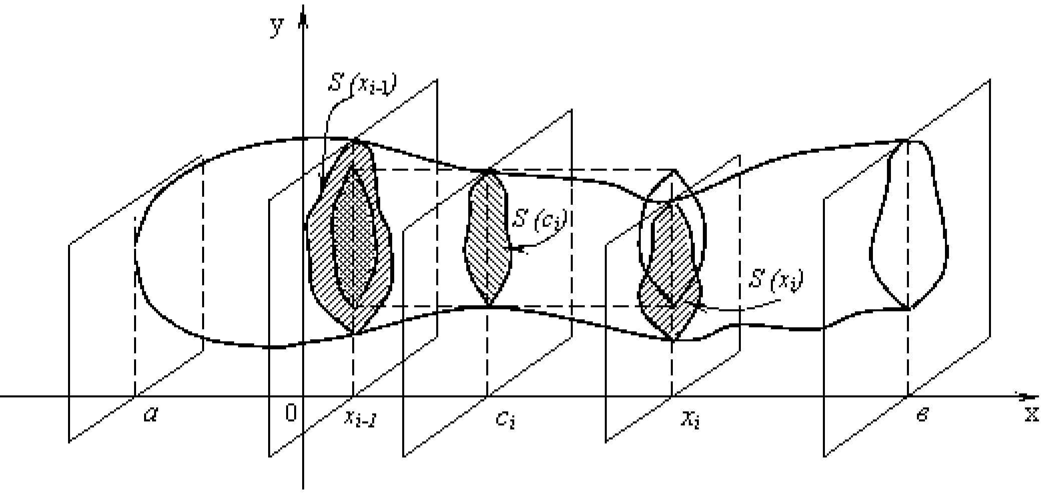


Рис. 266

Розглянемо деяке тіло, об'єм V якого треба визначити (рис.266). Нехай відома площа будь-якого його перерізу, який одержуємо при перетині тіла площиною, що перпендикулярна до деякої прямої, наприклад, до осі OX. Позначимо площу перерізу через S. При цьому можемо вважати, що $S = S(x)$, де x – абсциса точки перетину перпендикулярної площини з віссю OX.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин точками $a = x_0,\ x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ Через ці точки проведемо площини, що перпендикулярні до осі OX. Тоді тіло розіб'ється на n частинних тіл. В кожному частинному проміжку виберемо довільну точку c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ і для кожного значення i побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна до осі OX. Позначимо через V_i– об'єм i–го циліндра. Його висота $H_i = \Delta x_i$, а площа основи –$S(c_i)$. Тоді $V_i = S(c_i)\Delta x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

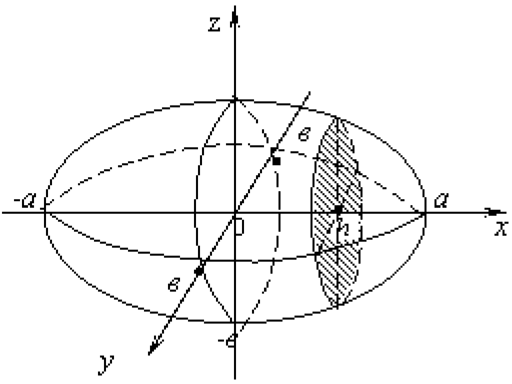


Рис. 267

Шуканий об'єм $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$. Тоді об'єм V тіла буде обчислюватись за формулою

$$V = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Отже,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \tag{2.33}$$

де $S(x)$ – поперечний переріз.

Приклад № 62. Визначити об'єм тіла

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \tag{2.34}$$

▲ Перетнемо тіло, яке задано рівнянням (6.34), площиною $x = h$, $(h < a)$ маємо (рис.267)

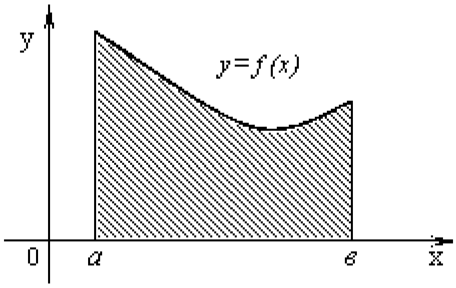


Рис. 268

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

тобто

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

Це є рівняння кола, радіус якого $R = b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$. Оскільки $S_{\text{кола}} = \pi R^2$, то $S = \pi \dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2 - h^2\right)$.

Тоді

$$V = \int_{-a}^{a} S(h)\,dh = \int_{-a}^{a} \pi b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi b^2\left(h - \frac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \pi b^2\left(a - \frac{a^3}{3a^2} - (-a) + \frac{(-a)^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2$$ (од.^{3}).

Якщо $a = b = R$, то одержимо кулю, об’єм якої дорівнює $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. ▼

15.2. Обчислення об’єму тіла обертання

а) Обертання навколо осі OX

◐ 1. Нехай криволінійна трапеція, що обмежена графіком неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, віссю OX і прямими $x = a$, $x = b$ (рис.268), обертається навколо осі OX. При обертанні трапеції дістаємо тіло, яке називається ***тілом обертання***.

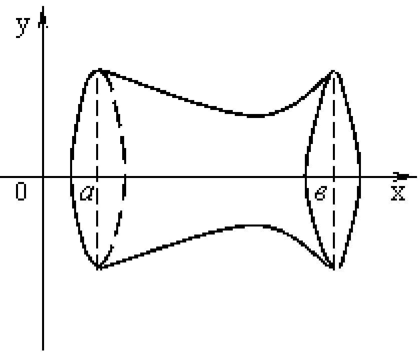


Рис. 269

В цьому випадку довільний переріз тіла площиною, що перпендикулярна до осі OX, є коло, площа якого дорівнює

$$S = \pi y^2 = \pi\left(f(x)\right)^2. \tag{2.35}$$

Застосовуючи формулу (6.35), одержимо формулу для обчислення об’єму тіла обертання (рис.269):

$$V = \int_a^b S\,dx = \boldsymbol{\pi}\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2.36}$$

Приклад № 63. Обчислити об’єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ для $x \in [0;\ \pi]$.

▲ 1. Побудуємо криву $y = \sin x$ і покажемо тіло обертання (рис.270).

2. Шуканий об’єм тіла будемо обчислювати за формулою

$$V = \boldsymbol{\pi}\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

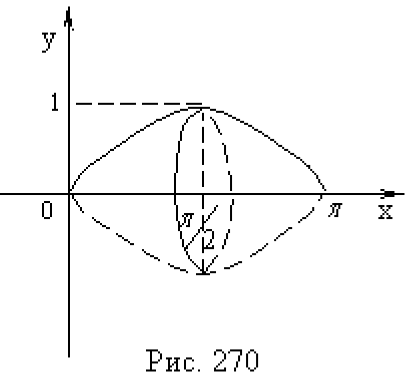


Рис. 270

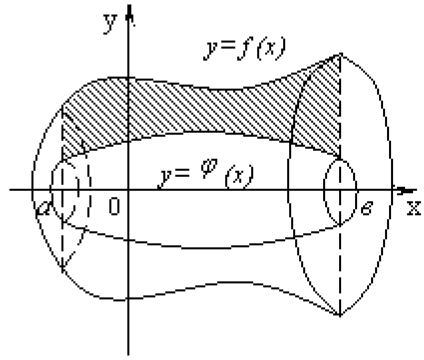


Рис. 271

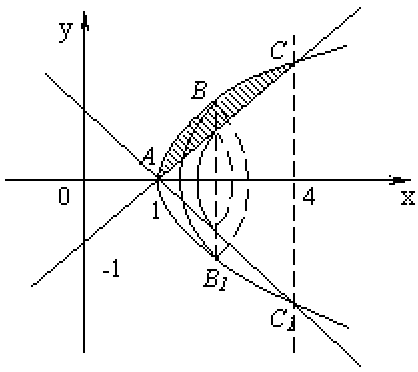


Рис. 272

Тоді $V = \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi (1 - \cos 2x) dx =$
$\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$ (од^3).▼

◐ 2.Якщо плоска фігура, що обмежена графіками неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ $(f(x) \geq \varphi(x))$ і прямими $x = a$, $x = b$ обертається навколо осі OX, тоді об'єм одержаного тіла обертання (рис.271) обчислюється за формулою

$$V = \pi \int\limits_a^b \left(f^2(x) - \varphi^2(x)\right) dx. \tag{2.37}$$

Приклад № 64. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $x - y - 1 = 0,\ 3x - y^2 - 3 = 0$.

▲ 1. В прямокутній системі координат будуємо параболу $y^2 = 3(x-1)$ і пряму $y = x - 1$. Навколо осі OX потрібно обертати фігуру ABC, що заштрихована на рисунку 272.

2. Знайдемо координати точок A, C перетину параболи і прямої з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y^2 - 3 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ 3(y+1) - y^2 - 3 = 0, \end{cases}\Bigg| y^2 - 3y = 0, \quad y(y-3) = 0,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Точки $A(1; 0),\ \ C(4; 3)$ – точки перетину параболи $3x - y^2 - 3 = 0$ і прямої $x - y - 1 = 0$.

3. Обчислимо шуканий об'єм V за формулою

$$V = V_{CBAB_1C_1} - V_{CAC_1} = \pi \int\limits_1^4 \left(f^2(x) - \varphi^2(x)\right) dx.$$

Тут $y = f(x)$ – рівняння параболи, а $y = \varphi(x)$ – рівняння прямої. Для $f(x)$: $y = \sqrt{3x - 3}$, а для $\varphi(x)$: $y = x - 1$.

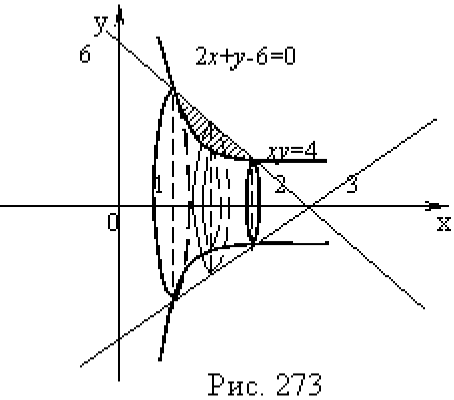


Рис. 273

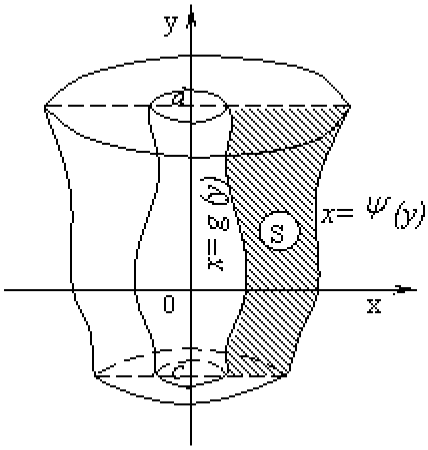


Рис. 274

Отже,

$$V=\pi\int_1^4\left(3x-3-(x-1)^2\right)dx=\pi\int_1^4\left(3x-3-x^2+2x-1\right)dx=$$

$$=\pi\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=\pi\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x\right)\Big|_1^4=$$

$$=\pi\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5}{2}\cdot4^2-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)=9\pi/2$$ (од.^{3}) .▼

Приклад № 65. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої лініями $xy=4,\ 2x+y-6=0$ навколо осі OX .

▲ 1. Побудуємо лінії $xy=4,\ 2x+y-6=0$ (рис.273).

2. Знайдемо точки перетину гіперболи $xy=4$ і прямої $2x+y-6=0$ з системи рівнянь:

$$\begin{cases}xy=4,\\2x+y-6=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-2x,\\x(6-2x)=4,\end{cases}\Big|-2x^2+6x-4=0,$$

$$x^2-3x+2=0,$$

$$x_1=2,\ x_2=1;\quad y_1=2,\ y_2=4.$$

3. Обчислимо шуканий об'єм:

$$V=\pi\int_1^2\left((6-2x)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right)dx=\pi\int_1^2\left(36-24x+4x^2-\frac{16}{x^2}\right)dx=$$

$$=\pi\left(36x-12x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_1^2-16\pi\int_1^2x^{-2}dx=\pi\left(72-36-48+12+\frac{4}{3}\cdot8-\frac{4}{3}\right)+16\pi\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{28}{3}\pi+16\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=4\pi/3$$ (од.^{3}) .▼

б) Обертання навколо осі OY

Якщо плоска фігура, що обмежена графіками неперервних на відрізку $[c;d]$ функцій $x=q(y),\ x=\psi(y)\ \ (\psi(y)\ge q(y))$ і прямими $y=c,\ \ y=d$, обертається навколо осі OY , то об'єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_c^d\left(\psi^2(y)-q^2(y)\right)dy. \qquad (2.38)$$

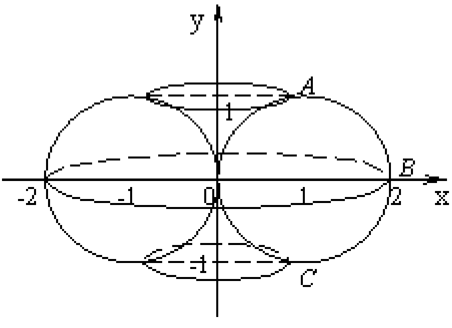


Рис. 275

На рисунку 274 зображено тіло, об'єм якого обчислюється за формулою (2.38).

Приклад № 66. Знайти об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі OY фігури, обмеженої лінією $(x-1)^2+y^2=1$.

▲ 1. Побудуємо лінію

$$(x-1)^2+y^2=1. \qquad (2.39)$$

Це є коло з центром у точці $(1;0)$, радіус кола $R=1$ (рис.275).

2. Обертаємо коло навколо осі OY. Зовнішню поверхню тіла обертання одержуємо при обертанні дуги $\breve{ABC}$, рівняння якої знайдемо з рівняння (2.39):

$$(x-1)^2=1-y^2,\ x-1=\sqrt{1-y^2},$$

$$x=1+\sqrt{1-y^2}. \qquad (2.40)$$

Внутрішня поверхня утворюється при обертанні дуги $\breve{AOC}$, її рівняння $x-1=-\sqrt{1-y^2}$, тобто $x=1-\sqrt{1-y^2}$.

3. Шуканий об'єм $V=V_{ABC}-V_{AOC}$, де

$$V_{ABC}=\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)^2dy,\quad V_{AOC}=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)^2dy.$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right)dy=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1+2\sqrt{1-y^2}+1-y^2-1+2\sqrt{1-y^2}-1+y^2\right)dy=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}4\sqrt{1-y^2}\,dy=\begin{bmatrix} y=\sin t, & dy=\cos t\,dt & \\ t & -\pi/2 & \pi/2 \\ y & -1 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=2\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=2\pi\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)=2\pi^2$$ (од.^{3}) .▼

в) Обертання навколо осі кривої, заданої параметричними рівняннями

Якщо неперервна функція $y=f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\quad (\alpha\le t\le\beta),$$

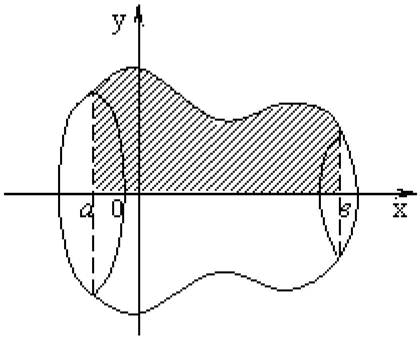


Рис. 276

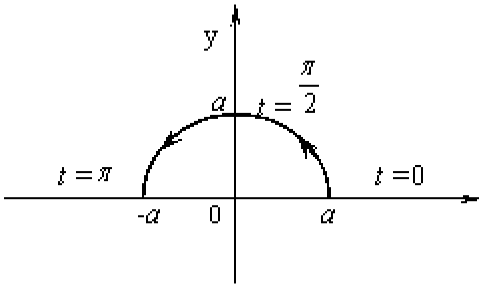


Рис. 277

де $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну $x'(t)$ на $[\alpha,\beta]$ і $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$; $y(t)$ – неперервна на $[\alpha,\beta]$, то об'єм тіла, утвореного при обертанні криволінійної трапеції, що обмежена лініями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta),$ віссю OX, прямими $x=a$, $x=b$, навколо осі OX (рис.276), обчислюється за формулою

$$V=\boldsymbol{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\,dx(t)=\boldsymbol{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2.41}$$

Якщо функція $x(t)$ спадна на $[\alpha,\beta]$, тобто має від'ємну похідну $x'(t)$, і $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$, то при тих самих інших умовах

$$V=-\boldsymbol{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2.42}$$

Приклад № 67. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x=a\,\mathbf{cos}\,t, \\ y=a\,\mathbf{sin}\,t. \end{cases} \quad (a>\mathbf{0})$$

▲ 1. Перевіримо, функція $x(t)$ спадає, чи зростає. При $0\le t\le\pi$: $x'=-a\sin t<0$. А при $t\in[0;\pi]$ $y\ge 0$. Оскільки $x'(t)<0$ при $t\in[0;\pi]$, то $x(t)$ спадає при $t\in[0;\pi]$, тобто рух вздовж осі OX буде у від'ємному напрямі при t від 0 до π (рис.277). Для обчислення об'єму V шуканого тіла обертання скористаємося формулою (2.42):

$$V=-\pi\int_0^{\pi} y^2(t)\,dx(t)=\pi\int_0^{\pi} a^3\sin^3 t\,dt=$$

$$\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\sin t\,dt= \qquad =-\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^2 t\,d(\cos t)=-\pi a^3\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t)=$$

$$=-\pi a^3\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\pi}=-\pi a^3\,(\cos\pi-\frac{1}{3}\cos^3\pi-\cos 0+\frac{1}{3}\cos^3 0)=$$

$$=-\pi a^3\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi a^3$$ (од.^{3}) .▼

Приклад № 68. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x=a\,(t-\mathbf{sin}\,t), \\ y=a\,(\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,t). \end{cases} \quad (a>\mathbf{0})$$

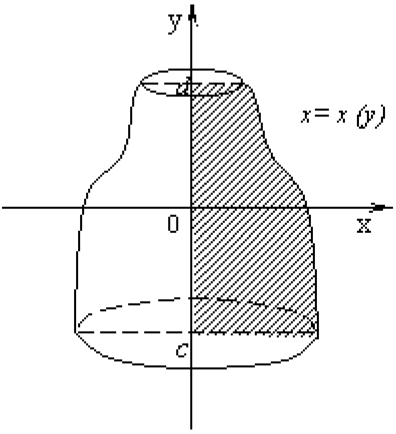


Рис. 278

▲ Побудову циклоїди було зроблено в прикладі № 53 цього розділу.

Оскільки $x' = a(1-\cos t) \ge 0$ при $t \in [0;\, 2\pi]$, $y \ge 0$ при $t \in [0;\, 2\pi]$, а $x(t)$ зростає від 0 до $2\pi a$ при t від 0 до 2π, то скористаємося формулою (6.41) для обчислення шуканого об'єму

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)\, dx(t) = \begin{bmatrix} x = a(t-\sin t), & y = a(1-\cos t) \\ dx = a(1-\cos t)\,dt, & dy = a\sin t\, dt \end{bmatrix} =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1-3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt = \pi a^3 (t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ 3a^3\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - a^3\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t\, dt = \pi a^3 (2\pi - 3\sin 2\pi) +$$

$$+ 3a^3\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\, dt - a^3\pi \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\, d(\sin t) =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3}{2} a^3\pi \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} - a^3\pi \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3}{2} a^3\pi \left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi \right) - a^3\pi \left(\sin 2\pi - \frac{1}{3}\sin^3 2\pi \right) =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 = 5\pi^2 a^3 \text{ (од.}^3\text{)}\ .$$ ▼

г) Обертання навколо осі OY кривої, заданої параметрично

Якщо функція $x = x(y)$ (рис.278) задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = y(t), & t \in [\alpha;\, \beta] \end{cases}$$

і $y(\alpha) = c$, $y(\beta) = d$, $y(t)$ зростає на $[\alpha;\, \beta]$, тоді $y'(t) \ge 0$ при $t \in [\alpha;\, \beta]$, то

$$V = \boldsymbol{\pi} \int_\alpha^\beta x^2(t)\, y'(t)\, dt. \tag{2.43}$$

Якщо $y(t)$ спадає на $[\alpha;\, \beta]$, тоді $y'(t) \le 0$, $y(\alpha) = d$, $y(\beta) = c$, то

$$V = -\boldsymbol{\pi} \int_\alpha^\beta x^2(t)\, y'(t)\, dt.$$

Приклад № 69. Фігура, що обмежена кривою $x = a\cos t,\ y = a\sin 2t$ $\left(0 \le t \le \pi/4\right)$ і віссю OX, обертається навколо осі OY. Знайти об'єм тіла обертання.

▲ $y = a\sin 2t$, а $y' = 2a\cos 2t \ge 0$, $t \in \left[0;\, \pi/4\right]$. При зростанні t від 0 до $\pi/4$, $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає. Тому для обчислення об'єму V скористаємося формулою (2.43):

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} x^2(t)\, y'(t)\, dt = \pi \int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 t \cdot 2a\cos 2t\, dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \cdot \cos 2t\, dt = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\cos 2t\, dt = \pi a^3 \int_0^{\pi/4} (\cos 2t + \cos^2 2t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 4t)dt \right) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{2}\left(1 + \left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/4}\right) = \frac{\pi a^3}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{4}\sin(\pi)\right) = \pi a^3/2 + \pi^2 a^3/8 \quad \text{(од.}^3\text{)} .▼$$

д) Об'єм в полярних координатах

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $r = r(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi \tag{2.44}$$

Приклад № 70. Обчислити об'єм тіла, обмеженого лініями $r = a\cos\varphi$, $|\varphi| \le \pi/6$, $(a > 0)$.

▲ Побудуємо замкнену лінію $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$. Область визначення знаходимо з умови, що $r \ge 0$:

$$\cos\varphi \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Область визначення розбивається на сектори в залежності від значень k. Випишемо ці сектори:

$$k = 0: \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2; \; k = 1: \quad 3\pi/2 \le \varphi \le 5\pi/2.$$

Сектор при $k=1$ співпадає з сектором при $k = 0$. Таким чином, матимемо один сектор $[-\pi/2;\ \pi/2]$. На всіх інших секторах $r < 0$ і графік кривої не існує.

$[-\pi/2;\ \pi/2]$:

φ	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	$a/2$	$\sqrt{2}a/2$	$\sqrt{3}a/2$	a	$\sqrt{3}a/2$	$\sqrt{2}a/2$	$a/2$	0

Проведемо промені, які виходять з початку координат під кутами, записаними в таблиці. На кожному промені відкладемо відрізок довжиною r, яка відповідає даному значенню φ з таблиці. Потім плавною кривою з'єднаємо знайдені точки на променях (рис.279).

Полярна вісь розбиває плоску фігуру $0 \le r \le a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ на дві рівні частини, тому інтегруємо від 0 до $\frac{\pi}{6}$, використовуючи формулу (6.44). Маємо

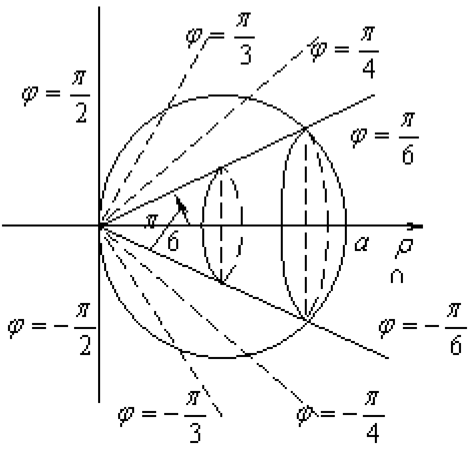


Рис. 279

$$V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_0^{\pi/6}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi=-\frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\pi/6}\cos^3\varphi\, d(\cos\varphi)=$$

$$=-\frac{2}{3}\pi a^3\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\pi/6}=-\frac{1}{6}\pi a^3\left(\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^4-(\cos 0)^4\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{6}a^3\left(\frac{9}{16}-1\right)=\frac{7}{96}\pi a^3$$ (од.^{3}) .▼

§ 16. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

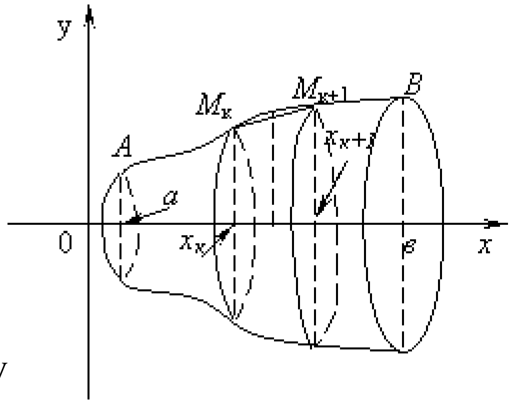


Рис. 280

Нехай незамкнена спрямлена крива AB (рис.280), що лежить у площині XOY, обертається навколо осі OX. Поверхня, яка при цьому утворюється, називається ***поверхнею обертання***.

Для простоти викладок допускаємо, що дуга AB задана параметричними рівняннями $x=\varphi(l)$, $y=\psi(l)$, де l – довжина дуги, $l\in[0;\ L]$, $L=|\breve{AB}|$. Розіб'ємо відрізок $[0;\ L]$ на n довільних частинних відрізків точками $0=l_0<l_1<\ldots<l_n=L$. Тоді кожному значенню l_k, $k=\overline{0,n}$, на кривій відповідає точка M_k. З'єднаємо точки відрізками ламаної і розглянемо відрізок $M_k M_{k+1}$, який описує бічну поверхню зрізаного конуса при обертанні його навколо осі OX.

Площа бічної поверхні ΔS_k конуса обчислюється за формулою

$$\mathbf{\Delta} S_k=\mathbf{2\pi}\cdot\frac{y_k+y_{k+1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\Delta} l_k,\quad \text{де}\quad y_k=\psi(l_k),\quad \Delta l_k=|M_k M_{k+1}|.$$

Площа ΔS_k бічної поверхні, яка утворюється при обертанні ламаної, що вписана в дугу AB, навколо осі OX дорівнює

$$\Delta S=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta S_k=\sum_{k=0}^{n-1}2\pi\cdot y(c_k)\Delta l_k,\quad \text{де}\quad y(c_k)=\frac{y_k+y_{k+1}}{2},\quad c_k\in[x_k;\ x_{k+1}].$$

Площею поверхні $S_{пов.}$ тіла, що одержуємо обертанням навколо осі OX заданої кривої, називається

$$\lim_{\Delta l\to 0}\Delta S=\lim_{\max\limits_k \Delta l_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}2\pi\cdot y(c_k)\Delta l_k.$$

Отже,

$$S_{\text{пов.}} == \lim_{\max\limits_k \Delta l_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \cdot y(c_k)\Delta l_k = 2\pi \int_0^L y(l)dl$$
.

Позначимо через $S_{\text{пов.}}$ площу поверхні обертання.

Розглянемо випадки:

◐ 1.Крива AB задається функцією $y=f(x)$, де $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, причому $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні на цьому відрізку функції. Нехай AB обертається навколо осі OX. Тоді

$$S_{\text{пов.OX}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b f(x)\,dl \quad (2.45)$$

де $dl = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

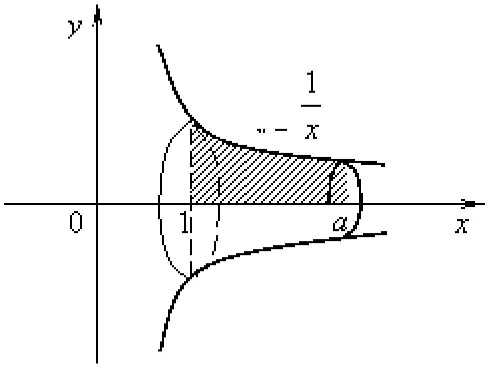


Рис. 281

Приклад № 71. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{1}{x}$, $1 \le x \le a$ $(a>1)$.

▲ 1. Побудуємо криву, яка задана рівнянням $y=\dfrac{1}{x}$ (рис.281).

2. За формулою (2.45), матимемо

$$S_{\text{повOX.}} = 2\pi \int_1^a y(x)\,dl = 2\pi \int_1^a y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{x}\right)'\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\,dx = 2\pi \int_1^a x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}\,dx.$$

Маємо інтеграл від диференціального бінома. Метод знаходження таких інтегралів детально описаний в розділіV. Тут $m=-3,\ n=4,\ p=\dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{m+1}{n}+p=0$.

Тоді використовуємо підстановку $1+x^4=t^2x^4$, звідки $\dfrac{1}{x^4}=t^2-1$, або $\dfrac{1}{x^4}+1=t^2$, $x^4=\dfrac{1}{t^2-1}$, $x=\left(t^2-1\right)^{-1/4}$,

$$dx = -\frac{t}{2\left(t^2-1\right)^{5/4}}\,dt. \quad (2.46)$$

Обчислимо невизначений інтеграл $\int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx$, використовуючи підстановку (2.46):

$$\int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx=-\int\left(t^2-1\right)^{3/4}\cdot t\cdot\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{1/2}}\cdot\frac{t}{2\left(t^2-1\right)^{5/4}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2\left(t^2-1\right)^{3/4}}{\left(t^2-1\right)^{7/4}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int dt+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=$$

$$=\left[t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|+c.$$

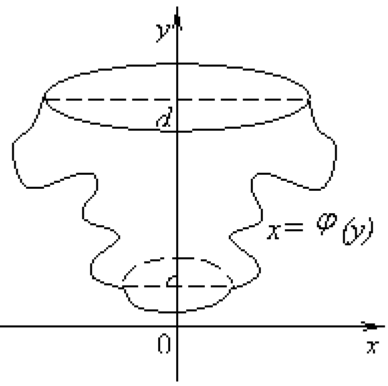


Рис. 282

Тоді

$$S_{\text{пов.}}=2\pi\int_1^a x^{-3}(1+x)^{1/2}dx=2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|\right)\Bigg|_1^a=$$

$$=2\pi\left(-\frac{\sqrt{1+a^4}}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+a^4}+a^2}{\sqrt{1+a^4}-a^2}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|\right)=$$

$$=2\pi\,(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{1+a^4}}{2a^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+a^4}+a^2\right)^2}{\left(\sqrt{1+a^4}-a^2\right)\left(\sqrt{1+a^4}+a^2\right)}\right|-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}\right|)=\sqrt{2}\,\pi-\frac{\pi}{a^2}\sqrt{1+a^4}+\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{1+a^4}+a^2)^2}{1+a^4-a^4}\right|-$$

$$-\frac{2\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\sqrt{2}\,\pi-\frac{\pi}{a^2}\sqrt{1+a^4}+\pi\ln\frac{\sqrt{1+a^4}+a^2}{\sqrt{2}+1}$$ (од.^{2}). ▼

◐ 2. Крива AB обертається навколо осі OY (рис.282), задана рівнянням $x=\varphi(y)$, $y\in[c;d]$, причому $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$ – неперервні функції на $[c;d]$.

Тоді

$$S_{\text{пов.OY}}=\boldsymbol{2\pi}\int_c^d\boldsymbol{\varphi}(y)\sqrt{\mathbf{1}+\left(\boldsymbol{\varphi}'(y)\right)^2}\,dy=\boldsymbol{2\pi}\int_c^d\boldsymbol{\varphi}(y)\,dl, \qquad (2.47)$$

де $dl=\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy.$

Приклад № 72.

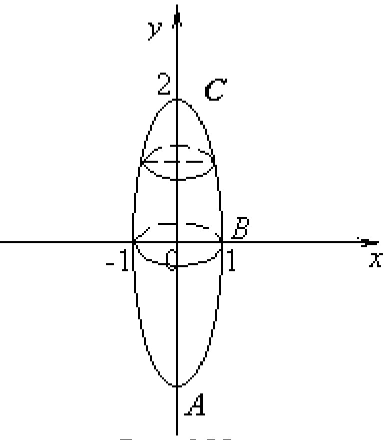


Рис. 283

Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням еліпса $4x^2+y^2=4$ навколо осі OY.

▲ Скористаємося формулою (2.47). Поверхня тіла обертання утворюється при обертанні навколо осі OY дуги ABC (рис.283), рівняння якої $x=\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$. Тоді

$$x'(y)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-y^2}\right)'=\frac{-y}{2\sqrt{4-y^2}}; \qquad (x'(y))^2=\frac{y^2}{4(4-y^2)}.$$

$$S_{\text{пов.OY}}=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy,$$

$$S_{\text{пов.OY}}=2\pi\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\,\sqrt{1+\frac{y^2}{4(4-y^2)}}\,dy=$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,\sqrt{\frac{16-4y^2+y^2}{4(4-y^2)}}\,dy=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{16-3y^2}\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2-y^2}\,dy=\left[\begin{array}{lll} y=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t; & dy=\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt; & \\ \sin t=\frac{\sqrt{3}}{4}y; & t=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}y\right) & \\ y & 2 & -2 \\ t & \pi/3 & -\pi/3 \end{array}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t\right)^2}\;\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\;\pi\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos t\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt=\left[\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\right]=$$

$$=\frac{8\pi}{2\sqrt{3}}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\pi\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}+1\right)$$ (од.^{2}). ▼

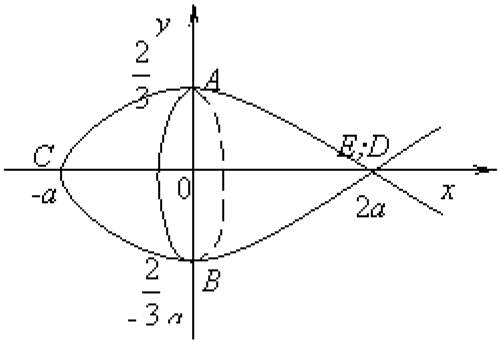


Рис. 284

◐ 3. Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де функції $x(t)$, $y(t)$ задані на відрізку $[t_1; t_2]$ і неперервні на цьому відрізку разом з похідними $x'(t)$, $y'(t)$, то

$$S_{\text{пов}OX} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dl. \tag{2.48}$$

Тут $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$

Приклад № 73. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої

$$x = a(t^2 - 1), \quad y = \frac{at}{3}(3 - t^2), \quad (a > 0) \tag{2.49}$$

навколо осі OX.

▲ Побудуємо криву, задану рівняннями (6.49). Знайдемо точки перетину кривої (2.49) з осями координат:

$x = 0$ при $t = \pm 1;$ $y = 0$ при $t = 0,$ $t = \pm\sqrt{3}$.

Тоді при $t = 1,$ $x = 0,$ а $y = \frac{2a}{3};$

$t = -1,$ $x = 0,$ $y = -\frac{2a}{3};$ $t = 0, y = 0,$ $x = -a;$

$t = \sqrt{3},$ $y = 0,$ $x = 2a;$

$t = -\sqrt{3},$ $y = 0,$ $x = 2a.$

Тому маємо точки $A\left(0; \frac{2a}{3}\right);$ $B\left(0; -\frac{2a}{3}\right);$ $C(-a; 0);$ $D(2a; 0),$ $E(2a; 0)$. Точки D і E співпадають. Це точки самоперетину кривої. При $0 \le t \le \sqrt{3},$ $y \ge 0$; при $-\sqrt{3} \le t \le 0$, $y \le 0$ (рис.284).

Обчислимо $S_{\text{пов.}OX}$ за формулою (6.48). Для цього знаходимо $x'(t),$ $y'(t)$:

$x'(t) = \left(a(t^2 - 1)\right)' = 2at,$ $y'(t) = \left(at - \frac{a}{3}t^3\right)' = a - at^2;$

$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4a^2t^2 + \left(a \cdot (1 - t^2)\right)^2} = a\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} =$
$= a\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = a(t^2 + 1)$

Тоді

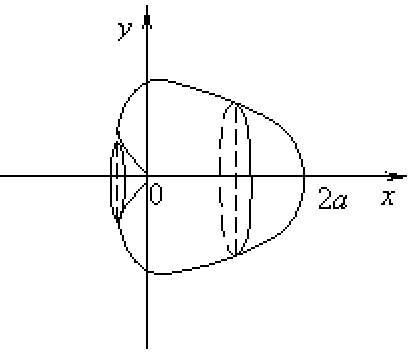


Рис. 285

$$S_{\text{пов.OX}} = 2\pi \int_0^{\sqrt3} \frac{at}{3}\left(3-t^2\right)a\left(t^2+1\right)dt = \frac{2}{3}\pi a^2 \int_0^{\sqrt3}\left(3t-t^3\right)\left(t^2+1\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 \int_0^{\sqrt3}\left(3t^3-t^5+3t-t^3\right)dt = \frac{2}{3}\pi a^2 \int_0^{\sqrt3}\left(2t^3-t^5+3t\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 \left(\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{6}+\frac{3}{2}t^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt3} = \frac{2}{3}\pi a^2\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{6}+\frac{9}{2}\right) = 3\pi a^2$$

(од.^{2}). ▼

◐ 4. Якщо крива задана рівнянням в полярних координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, де функція $r(\varphi)$ задана і неперервна разом з похідною на відрізку $[\varphi_1; \varphi_2]$, то

$$S_{\text{пов.}} = \mathbf{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\boldsymbol{\varphi})\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi}\sqrt{r^2(\boldsymbol{\varphi})+\left(r'(\boldsymbol{\varphi})\right)^2}\,d\boldsymbol{\varphi} \qquad (2.50)$$

Приклад № 74. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $r = a(1+\cos\varphi)$ навколо полярної осі.

▲ Графік кривої $r = a(1+\cos\varphi)$ побудовано в прикладі № 58. Тіло обертання, поверхню якого треба обчислити, зображено на рис.285. Використовуючи формулу (6.50), знайдемо:

$$S_{\text{пов.}} = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+\left(-a\sin\varphi\right)^2}\; a\left(1+\cos\varphi\right)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi}\left(\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\right)\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi}\sin\varphi\left(1+\cos\varphi\right)\sqrt{2\left(1+\cos\varphi\right)}\, d\varphi =$$

$$= 4\sqrt2\pi a^2 \int_0^{\pi}\sin\varphi\left(1+\cos\varphi\right)^{3/2} d\varphi = -4\sqrt2\pi a^2 \int_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^{3/2}\cdot d\left(1+\cos\varphi\right) =$$

$$= -4\sqrt2\pi a^2 \frac{\left(1+\cos\varphi\right)^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{8\sqrt2}{5}\pi a^2\left(\left(1+\cos\pi\right)^{5/2}-\left(1+\cos 0\right)^{5/2}\right) =$$

$$= -\frac{8\sqrt2}{5}\pi a^2\left(0-\sqrt{2^5}\right) = \frac{64}{5}\pi a^2$$

(од.^{2}). ▼

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ
§ 17. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

17.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

Задача про об’єм циліндричного тіла (бруса).

Просторове тіло (V), яке обмежене зверху поверхнею, що задана рівнянням $z = f(x, y)$, з боків — циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні до осі OZ, а знизу — плоскою фігурою (D), що лежить на площині XOY, називається***циліндричним тілом*** або циліндричним бруском (рис. 24).

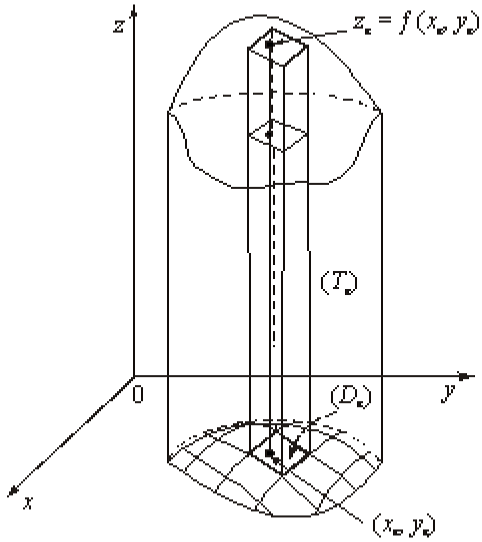


Рис. 24

Розглянемо задачу про обчислення об'єму циліндричного тіла.

Для цього розіб'ємо область (D) кривими на n частинних областей (D_1), (D_2) …, (D_n) і розглянемо n частинних брусків (T_1), (T_2),....., (T_n) з основами (D_1), (D_2),....., (D_n). Частинні бруски (T_k), $k=\overline{1,n}$ утворюють тіло (V). У кожній з областей (D_k), $k=\overline{1,n}$ виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$, $k=\overline{1,n}$. Замінимо кожний циліндричний брусок (T_k) звичайним циліндром з основою (D_k) і висотою $z_k = f(x_k, y_k)$. Нехай площа основи (D_k) дорівнює ΔS_k. Тоді об'єм V_k кожного циліндричного бруска обчислюється наближено за формулою $V_k \approx f(x_k, y_k)\Delta S_k$.

Об'єм V розглядуваного циліндра наближено дорівнює

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k. \tag{3.1}$$

Позначимо d_k □ діаметр області (D_k) (***діаметром області*** (D_k) будемо називати найбільшу відстань між будь — якими точками даної області).

Очевидно, чим більше n (тобто чим менше $d = \max\limits_{1\le k\le n} d_k$), тим точніше формула (8.1) відображає об'єм циліндричного бруска. Отже, якщо існує границя суми (8.1), то вона є об'ємом розглядуваного циліндричного тіла:

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta S_k, \tag{3.2}$$

і називається ***подвійним інтегралом***.

Подвійний інтеграл позначається: $\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds.$

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k. \tag{3.3}$$

Отже,

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)ds. \tag{3.4}$$

17.2. Подвійний інтеграл, його основні властивості.

Для функції $z = f(x,y)$, визначеній в області (D), розглянемо суму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot\Delta S_k. \tag{3.5}$$

Сума (8.5) називається ***подвійною інтегральною сумою*** для функції $f(x,y)$ в області (D).

Нехай $d = \max\limits_{1\le k\le n} d_k$, де d_k - діаметр області (D_k), $k = \overline{1,n}$.

Означення 1. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум (8.5) при $d \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття області (D) на частинні області $(D_k), k = \overline{1,n}$, ні від вибору в цих частинних областях точок $M_k(x_k,y_k)$, то вона називається***подвійним інтегралом*** *функції* $z = f(x,y)$ і позначається $I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)ds.$

Отже, за означенням, $\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k.$

Тут $f(x,y)$ — ***підінтегральна функція***, яка називається інтегровною в області (D), $f(x,y)ds$ — ***підінтегральний вираз,***

D **- *область інтегрування,***

ds — ***елемент площі***, який у прямокутній системі координат є $ds = dxdy$.
Використовуючи це, подвійний інтеграл записують ще так:

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{3.6}$$

Подвійний інтеграл (а також потрійний інтеграл) називають ще ***кратним інтегралом.***

Сформулюємо умови, за яких функція $z = f(x,y)$ є інтегровною в області (D).

◐ **Теорема 1** (необхідна умова інтегровності функції). Якщо функція $z = f(x,y)$ інтегровна в замкненій обмеженій області (D), то вона в цій області обмежена.

Теорема 1 є тільки необхідною умовою інтегровності функції, оскільки не кожна обмежена в області (D) функція буде в цій області інтегровною.

Теорема 2 (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області (D), то вона інтегровна в цій області.

Замкнена область — частина площини, що обмежена замкненою неперервною кривою.

Основні властивості подвійного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = c\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \quad (c = const).$$

2. Подвійний інтеграл від скінченної алгебричної суми функцій дорівнює алгебричній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\iint\limits_{(D)} \sum_{k=1}^{n} f_k(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{(D)} f_k(x,y)dxdy$$

(для випадку двох функцій: $\iint\limits_{(D)}(f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$).

3. Якщо область (D) розбити на дві області (D_1), (D_2) (рис. 25), які не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy.$

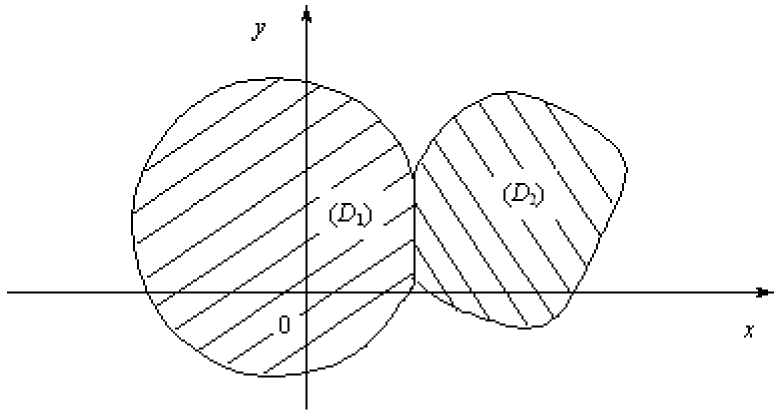


Рис. 25

Ця властивість справедлива для випадку скінченного числа областей (D_k), $k = \overline{1,n}$.

4. Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ визначені в області (D) і $f(x,y) \ge g(x,y)$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$.

5. Якщо $f(x,y) \ge 0$ в області (D), то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge 0$.

6. **Теорема** (про середнє значення). Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області (D), то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S,$
де S - площа області (D).

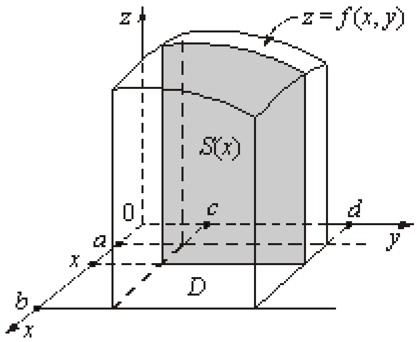
Величина $f\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f\left(x, y\right)dxdy$ називається ***середнім значенням*** функції $f(x,y)$ в області (D).

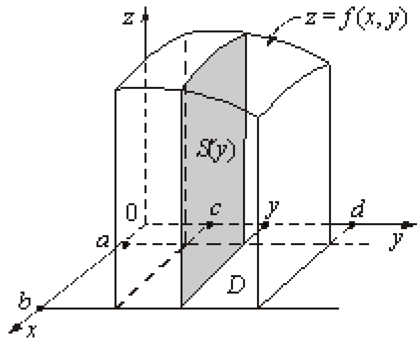
● 7. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області (D), то $mS \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S,$ де m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y)$ в області (D).

17.3. Обчислення подвійного інтеграла

1.3.1. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

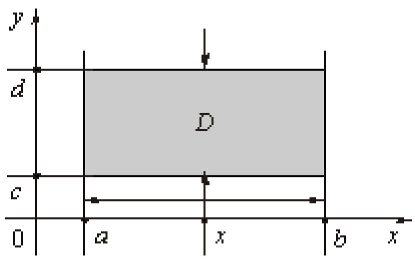
● а). *Випадок прямокутної області.* Нехай потрібно обчислити $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, де область (D) — прямокутник $[a,b;c,d]$, сторони якого паралельні до осей координат (рис. 26.в.)





а)

б)



в)

Рис. 26

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області (D) і $f(x,y) \ge 0$. Тоді $\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right)dxdy$ дорівнює об'єму V циліндра, побудованого на прямокутнику (D) як на основі і обмеженому зверху поверхнею $z = f(x,y)$:

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{3.7}$$

Інакше об’єм V побудованого циліндра (циліндричного бруска) (рис.3.а) можна обчислити методом перерізів: якщо $S(x)$ (чи $S(y)$) — площа перерізу циліндра площиною, перпендикулярною до осі OX (чи до осі OY) в точці $x \in [a;b]$ ($y \in [c;d]$), то

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{3.8}$$

(або $V = \int_c^d S(y)dy$).

Оскільки $S(x)$ - площа криволінійної трапеції, обмеженої знизу відрізком $[c;d]$, зверху кривою $z = f(x,y)$, де x — будь-яка точка із $[a;b]$, але фіксована, отже, для вибраного перерізу $x = const$. Відомо [3], що площа $S(x)$ такої трапеції дорівнює

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)dy. \tag{3.9}$$

Аналогічно можна одержати (рис. 26.б.)

$$S(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Підставимо в (8.8) значення $S(x)$ за формулою (8.9), дістанемо

$$\boldsymbol{V} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{3.10}$$

Аналогічно,

$$\boldsymbol{V} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Із (8.7) і (8.10) маємо:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx, \tag{3.11}$$

або
$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy, \tag{3.12}$$

де $(D) = \{(x;y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

Вирази, що стоять в правих частинах рівностей (3.11), (3.12) називаються ***повторними інтегралами*** від функції $f(x,y)$ по області (D) на площині XOY.

Повторні інтеграли ще позначають так:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \quad \text{або} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

З’ясуємо механізм обчислення повторних інтегралів

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx, \tag{3.13}$$

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy. \qquad (3.14)$$

У рівностях (3.13), (3.14) для випадку прямокутної області (D) (рис. 26.в) не має значення який з інтегралів обчислювати спочатку (по змінній x, а потім по y, чи навпаки). Проте правильний вибір порядку інтегрування навіть у випадку прямокутної області часто полегшує обчислення інтегралів від функції $f(x,y)$.

У рівності (3.13) обчислимо спочатку інтеграл $\int_c^d f(x,y)dy$ по змінній y, а x вважаємо сталою $(x = const)$. Інтегруючи, дістанемо неперервну функцію від x: $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Цей інтеграл називають ***внутрішнім***. Інтегруючи функцію $F(x)$ в межах від "a" до "b", дістанемо інтеграл $I = \int_a^b F(x)dx$. Він називається ***зовнішнім*** інтегралом. Аналогічно обчислюється інтеграл (3.14), тільки при обчисленні інтеграла $\int_a^b f(x,y)dx$ вважаємо, що $y = const.$

Приклад №1. Обчислити

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{x}}(2x+1)y^3dy\right)dx.$$

▼ Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл по y, вважаючи $x = const$; одержану функцію проінтегруємо по x:

$$I = \int_{-1}^{1}\left((2x+1)\int_0^{\sqrt{x}} y^3dy\right)dx = \int_{-1}^{1}(2x+1)\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(2x+1)\left(\sqrt{x}\right)^4dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(2x+1)x^2dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(2x^3+x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{6}$. ▲

● б). *Випадок криволінійної області.* Нехай треба обчислити $\iint_{(D)} f(x,y)dxdy,$ де область (D) — криволінійна, а функція $f(x,y)$ — неперервна в (D). Можливі випадки:

1) Область (D) — правильна в напрямку осі *OX*;
2) Область (D) — правильна в напрямку осі *OY*;
3) Область (D) — неправильна.

Означення 2. Область (D) називається ***правильною в напрямку осі*** *OX*, якщо вона обмежена: зліва і справа — неперервними кривими $x=\varphi_1(y)$ і $x=\varphi_2(y)$ відповідно, зверху і знизу відповідно прямими $y=c$ $y=d$, паралельними до осі OX, або точками (рис. 27).

Означення 3. Область (D) називається ***правильною в напрямку осі*** OY**,** якщо вона обмежена: знизу — однією і тією ж неперервною кривою $y=\varphi_1(x)$, зверху — $y=\varphi_2(x)$, зліва і справа відповідно прямими $x=a$ і $x=b$, паралельними до осі OY, або точками (рис. 28).

Означення 4. Область (D) називається ***правильною***, якщо прямі, паралельні до координатних осей, перетинають межу області у двох точках.

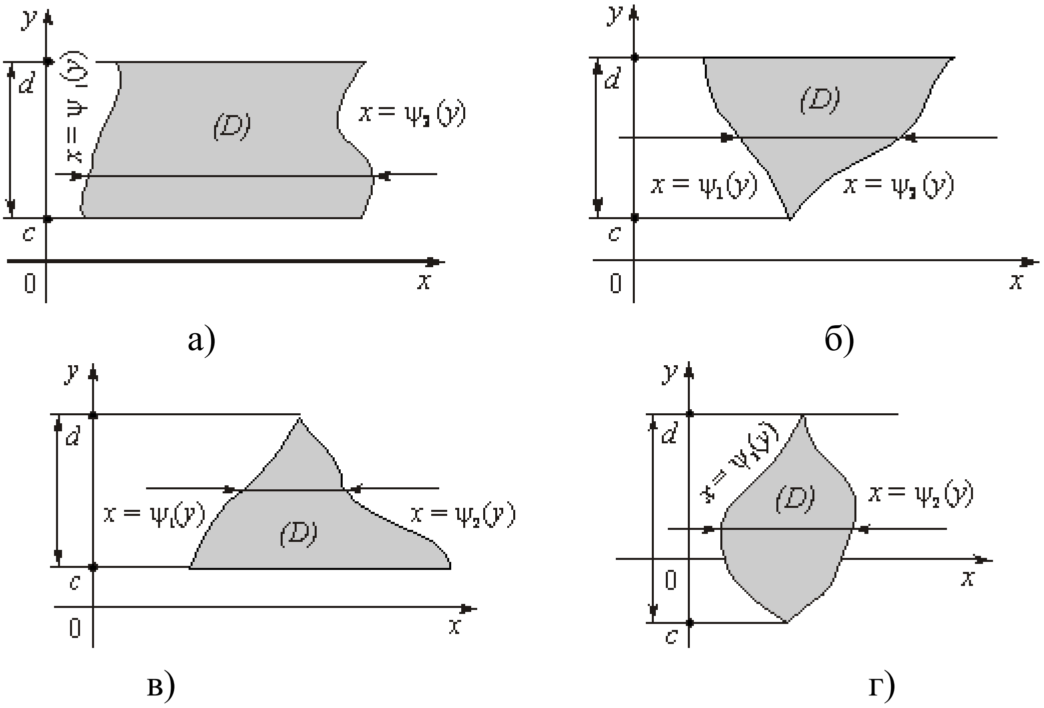


Рис. 27

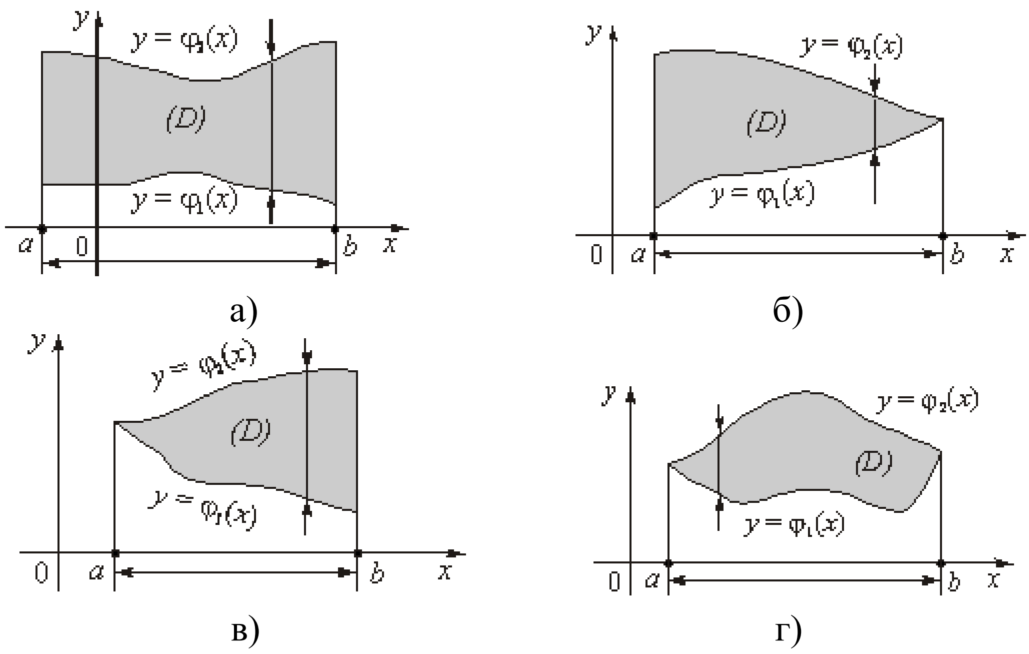


Рис. 28

!***Послідовність дій при обчисленні подвійного інтеграла:***

1) використовуючи умови задачі, побудувати лінії, що обмежують область (D), в системі координат XOY і обчислити координати точок перетину цих ліній;

2) з'ясувати: правильна чи неправильна область (D);

3) якщо область (D) правильна в напряму осі OY, тоді внутрішній інтеграл береться по змінній "*y*", а зовнішній — по "*x*" і обчислення подвійного інтеграла проводять за формулою

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy; \tag{3.15}$$

якщо ж область (D) правильна в напрямку осі OX, тоді внутрішній інтеграл береться по змінній "*x*", а зовнішній — по "*y*" і обчислення подвійного інтеграла проводять за формулою

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx; \tag{3.16}$$

4) якщо область (D) неправильна , то її розбивають на правильні області, а подвійний інтеграл обчислюють за властивістю 3.

Приклад №2.

Обчислити

$$I = \iint_{(D)} \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

,

де область (D) обмежена лініями $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

▼ 1^0. Побудуємо область (D) (рис. 29)

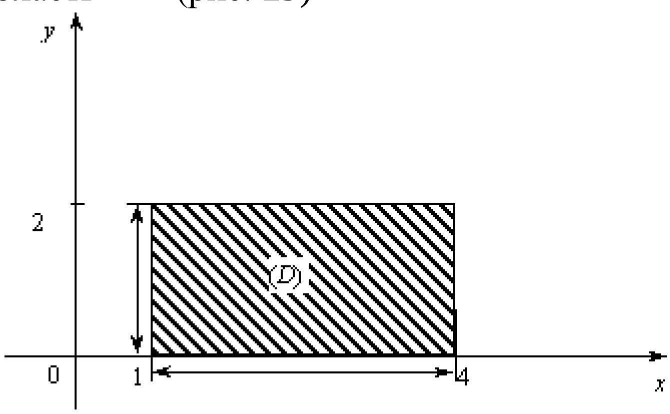


Рис. 29

2^0. Область (D) правильна як в напрямку осі OX, так і в напрямку осі OY.

Тому , для обчислення заданого інтеграла можна використовувати формулу (38.11), або (3.12), оскільки функція $f(x,y)=x^2+y^2$ неперервна на площині XOY, отже, вона також неперервна в області (D).

3^0. За формулою (8.11) маємо

$$I=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^2(x^2+y^2)dy=\int\limits_1^4\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 dx=$$

$$=\int\limits_1^4\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x\right)\Big|_1^4=\frac{2}{3}\cdot 64+\frac{8}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=50.$$

Відповідь: $I=50.$ ▲

Приклад №3.

Обчислити $I=\iint\limits_{(D)}(2x+y)dxdy$ де область (D) — заштрихована на рис. 30.

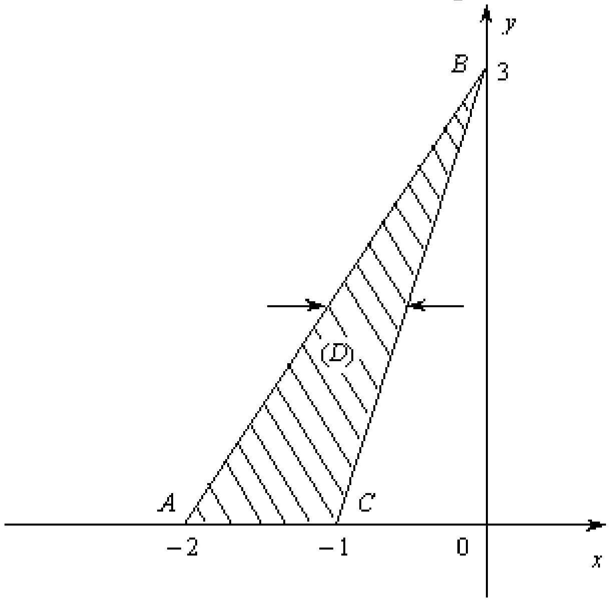


Рис. 30

▼ 1^0.Область (D)- правильна в напрямку осі OX, отже, у повторному інтегралі внутрішній інтеграл будемо брати по змінній x, а зовнішній — по y.

2^0.Складемо рівняння ліній, що обмежують область (D).

Рівняння AB:

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$, або $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}-1,$

звідки $x=\frac{2}{3}y-2$. Рівняння $BC:\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$, звідки $x=\frac{y}{3}-1$.

Отже, $(D)=\left\{(x;y):0\le y\le 3,\ \frac{2}{3}y-2\le x\le\frac{y}{3}-1\right\}$.

3^0. Обчислимо подвійний інтеграл, перейшовши до повторного за формулою (8.16):

$$I=\iint\limits_{(D)}(2x+y)dxdy=\int_0^3 dy\int_{\frac{2}{3}y-2}^{\frac{y}{3}-1}(2x+y)dx=\int_0^3\left(x^2+xy\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}y-2}^{\frac{y}{3}-1}=$$

$$=\int_0^3\left(\left(\frac{y-3}{3}\right)^2+y\cdot\frac{y-3}{3}-\left(\frac{2(y-3)}{3}\right)^2-y\cdot\frac{2y-6}{3}\right)dy=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{y^2-6y+9}{9}+\frac{y^2-3y}{3}-\frac{4}{9}\left(y^2-6y+9\right)-\frac{2}{3}\left(y^2-3y\right)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3\left(y^2-6y+9+3y^2-9y-4y^2+24y-36-6y^2+18y\right)dy=\frac{1}{9}\int_0^3\left(-6y^2+27y-27\right)dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3\left(-2y^2+9y-9\right)dy=\frac{1}{3}\left(-\frac{2y^3}{3}+\frac{9}{2}y^2-9y\right)\Bigg|_0^3=-6+\frac{27}{2}-9=-1{,}5.$$

Відповідь: – 1,5. ▲

Приклад №4.

Обчислити $\iint\limits_{(D)} dxdy$, якщо область (D) обмежена лініями $y=6x^2,\quad x+y=2,\quad x\geq 0$.

▼ 1^0. Побудуємо лінії, що обмежують область (D) (рис. 31). Область (D) заштрихована на рис. 31 і є правильною в напрямку осі OY.

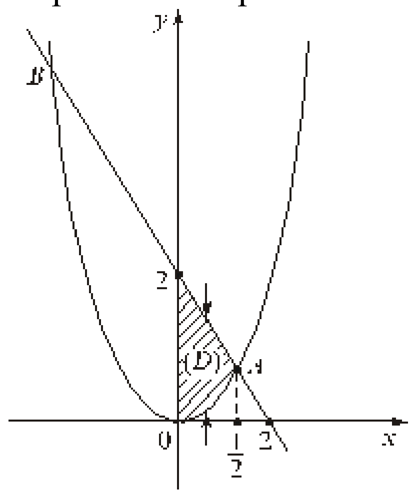


Рис. 31

2^0. Знайдемо межі інтегрування (точки A і B перетину параболи $y=6x^2$ і прямої $y=2-x$). Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=6x^2, \\ y=2-x, \end{cases}$$

дістанемо

$$\begin{cases} 2-x=6x^2, \\ y=2-x, \end{cases} \left| \begin{array}{l} 6x^2+x-2=0, \quad D=1-4\cdot 6\cdot(-2)=49 \\ x_1=\dfrac{-1+7}{12}=\dfrac{1}{2}, \; x_2=\dfrac{-1-7}{12}=-\dfrac{2}{3} \\ y_1=\dfrac{3}{2}, \qquad\qquad y_2=\dfrac{8}{3}. \end{array} \right.$$

Отже, $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right).$

Але $x \geq 0$, тому межі інтегрування по x від “0” до “$\frac{1}{2}$”.

$\mathbf{3}^0$. Обчислимо шуканий інтеграл за формулою (3.15):

$$\iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{6x^2}^{2-x} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (2-x-6x^2)dx = \left(2x-\frac{1}{2}x^2-2x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}.$$

Відповідь: $\mathbf{\frac{5}{8}}$. ▲

Приклад №5. Обчислити $\iint\limits_{(D)} (\mathbf{2}x-y)dxdy,$ якщо область (D) обмежена лініями $y=x^2-1, \; y=3.$

▼ 1^0. Будуємо область (D) (рис. 32).

$\mathbf{2}^0$. Знайдемо точки перетину ліній із системи:

$$\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} 3=x^2-1, \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} x=\pm 2, \\ y=3. \end{cases}$$

Отже, $a=\mathbf{2}, b=-\mathbf{2}.$

$\mathbf{3}^0$. Область (D) на (рис. 32) — правильна в напрямку осі OY.

$(D)=\{(x;y): -2\leq x\leq 2, \;\; x^2-1\leq y\leq 3 \}.$

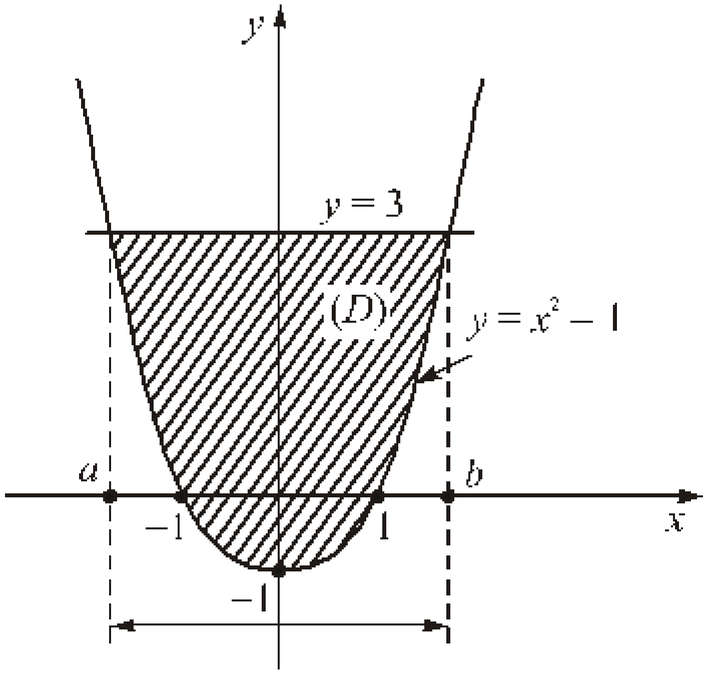


Рис. 32

4^0. За формулою (3.15) маємо

$$\iint\limits_{(D)}(2x-y)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2-1}^{3}(2x-y)dy=\int\limits_{-2}^{2}\left(2xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{x^2-1}^{3}dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(2x\cdot 3-2x\left(x^2-1\right)-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^2\right)dx=\int\limits_{-2}^{2}\left(6x-2x^3+2x-4{,}5+\frac{1}{2}\left(x^4-2x^2+1\right)\right)dx=$$

$$=\left(8\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{2}{4}x^4-4{,}5x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=4\cdot 4-4\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2^4+\frac{1}{2}\cdot(-2)^4-$$

$$-4{,}5\cdot 2+4{,}5\cdot(-2)+\frac{1}{10}\cdot 2^5-\frac{1}{10}\cdot(-2)^5-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+1-(-1)=-9-9+\frac{16}{5}+$$

$$+\frac{16}{5}-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+2=-\frac{224}{15}.$$

Відповідь: $-\dfrac{224}{15}$. ▲

Приклад №6.

Обчислити $\iint\limits_{(D)}xdxdy$, де область (D) обмежена лініями $x=2+\sin y$, $x=0$, $y=0$, $y=2\pi$.

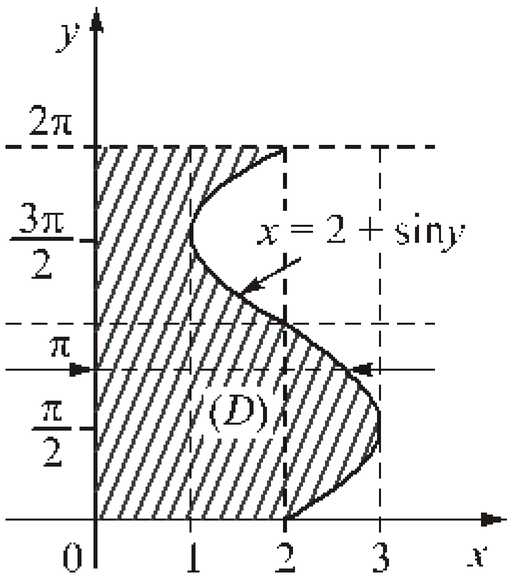


Рис. 33

▼ 1^0. Будуємо область (D):

$x=0, y=0, \quad \sin y = x-2,$ причому $|x-2| \le \mathbf{1},$ отже, $1 \le x \le 3.$

Маємо (рис. 33) $(D)=\{(x;y): 0 \le y \le 2\pi, \quad 0 \le x \le 2+\sin y \}.$

2^0. Область (D) правильна в напрямку осі OX.

3^0. Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного за формулою (8.16):

Відповідь: $\frac{9}{2}\pi.$ ▲

Приклад №7.

Обчислити $\iint\limits_{(D)} (|x|+|y|)dxdy,$ де область (D) обмежена лініями $|x|+|y|=1$.

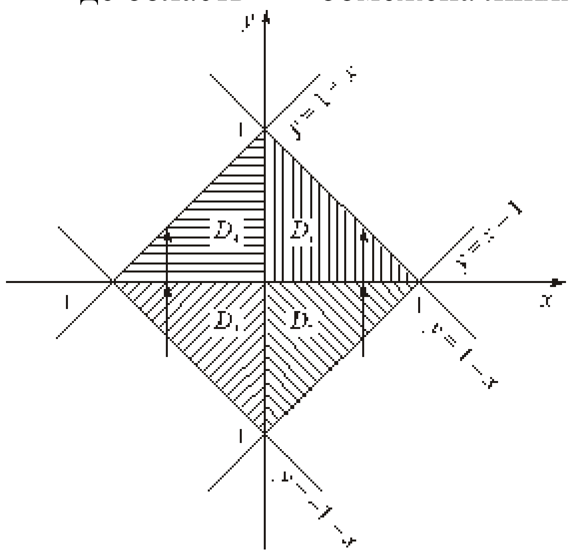


Рис. 34

$$|x|+|y|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ x+y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 0, \\ y\le 0, \\ x-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ y\le 0, \\ -x-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ y\ge 0, \\ -x+y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

▼ 1^0. Побудуємо область (D): $|x|+|y|=1$. Маємо

2^0. Область (D) заштрихована на рис. 34, неправильна. Розіб'ємо її на чотири правильні області (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) де

$$(D_1):\begin{cases} x+y=1, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0; \end{cases} \quad (D_2):\begin{cases} x-y=1, \\ x\ge 0, \\ y\le 0; \end{cases} \quad (D_3):\begin{cases} -x-y=1, \\ x\le 0, \\ y\le 0; \end{cases} \quad (D_4):\begin{cases} -x+y=1, \\ x\le 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

Тоді за властивістю 3,

$$\iint\limits_{(D)}(|x|+|y|)dxdy=\iint\limits_{(D_1)}(x+y)dxdy+\iint\limits_{(D_2)}(x-y)dxdy+\iint\limits_{(D_3)}(-x-y)dxdy+\iint\limits_{(D_4)}(-x+y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{0}(x-y)dy-\int_{-1}^{0} dx\int_{-x-1}^{0}(x+y)dy+\int_{-1}^{0} dx\int_0^{1+x}(-x+y)dy=$$

$$=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx+\int_0^1\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x-1}^{0}dx-\int_{-1}^{0}\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x-1}^{0}dx+\int_{-1}^{0}\left(-xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1+x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\right)dx+\int_0^1\left(-x(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2\right)dx-$$

$$-\int_{-1}^{0}\left(x(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(-x(1+x)+\frac{1}{2}(1+x)^2\right)dx=\int_0^1\left(x-x^2+\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)dx+$$

$$+\int_0^1\left(-x^2+x+\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{-1}^{0}\left(x^2+x-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(-x-x^2+\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=2-\frac{4}{6}=\frac{4}{3}.$$

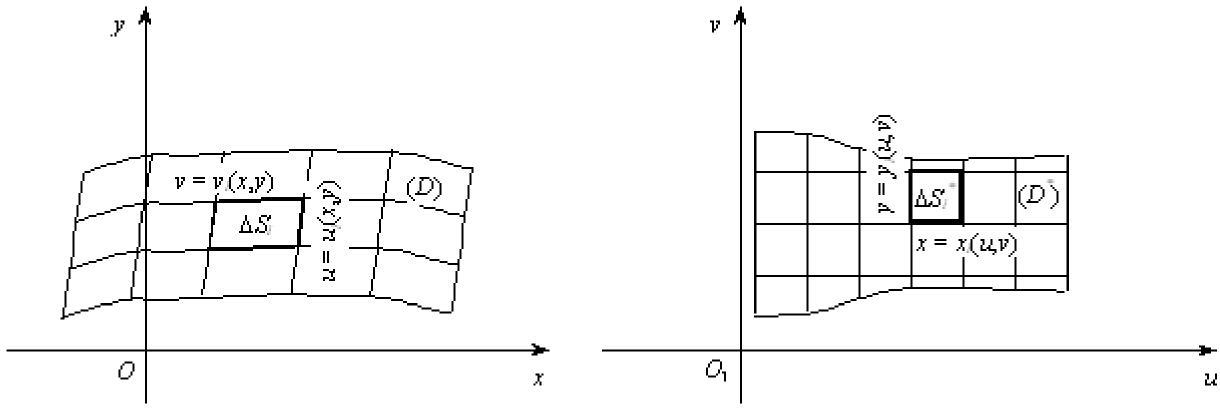
Відповідь: $\frac{4}{3}$. ▼

17.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
Подвійний інтеграл у полярних координатах

Як відомо при обчисленні визначених інтегралів застосовується метод заміни змінної. Розглянемо застосування цього методу до обчислення подвійних інтегралів. Нехай треба обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy,$ який існує, якщо $f(x,y)$ — неперервна в замкненій і обмеженій області (D) функція. Зробимо заміну змінних за формулами

$$\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \end{aligned} \tag{3.17}$$

причому припускаємо , що функції $x(u,v),\ y(u,v)$ задані і неперервні в області (D^*), яка має простий вигляд (рис. 35) у порівнянні з областю (D).



а) б)

Рис. 35

Формули (8.17) дозволяють перейти в інтегралі I до нових змінних u і v:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y), \\ v &= v(x,y), \end{aligned} \tag{3.18}$$

які утворюються при розв'язанні рівнянь (3.17) відносно u і v, причому u і v з (3.17) визначаються однозначно. Отже, між точками областей (D) і (D^*) встановлюється взаємно-однозначна відповідність за допомогою рівностей (3.17) та (3.18). Формули (38.17) називаються ***формулами перетворення координат***, а (3.18) — ***оберненого перетворення.***

◐ **Теорема 3.** Якщо:

1) перетворення (3.17) переводить замкнену обмежену область (D) в замкнену обмежену область (D^*) і є взаємно однозначним;

2) функції (3.17) мають в області (D^*) неперервні частинні похідні першого порядку;

3) визначник

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

відмінний від нуля;

4) функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(D^*)} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|I(u,v)\right|dudv. \tag{3.20}$$

Визначник (3.19) називається функціональним визначником або ***якобіаном*** (а також визначником Якобі[1]).

Приклад №8.

Обчислити $\iint\limits_{(D)} 2(x+y)^2\,dxdy$, де область (D) обмежена лініями $|x|+|y|=1$.

▼ Побудову області (D) було виконано у прикладі №7 (рис. 34), або рис. 36.а, причому область (D) є неправильною в напрямку осі OX і в напрямку OY. У прикладі №7 довелось розбивати її на чотири правильні області і обчислювати чотири інтеграли. Проте проста заміна змінних

$$x+y=u,\qquad y-x=v \tag{3.21}$$

дозволяє значно спросити обчислення заданого інтеграла. Прямі $x+y=1$, $x+y=-1$ в системі координат XOY переходять в прямі $u=1$ і $u=-1$ в системі координат 0_1uv (рис. 36), а прямі $y-x=-1$ і $y-x=1$ – в прямі $v=-1$ і $v=1$ (рис. 36.б).

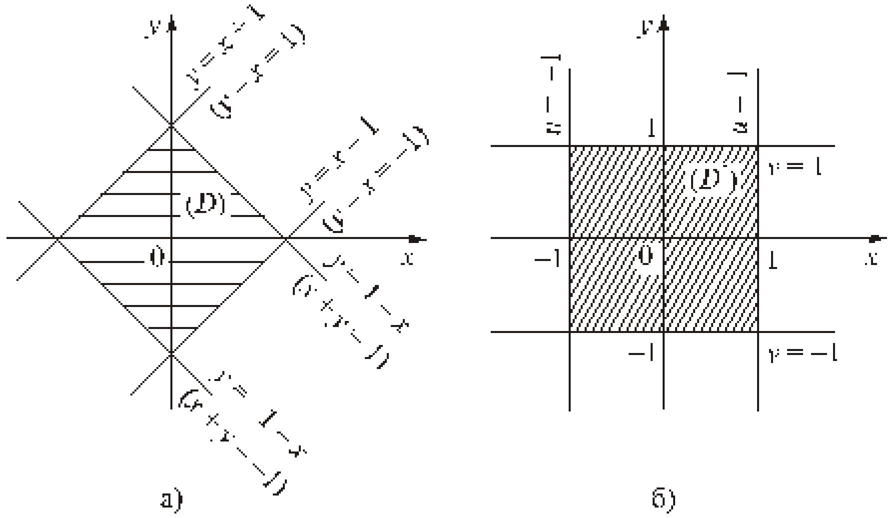


Рис. 36

Область (D^*) простіша, ніж область (D), оскільки при обчисленні заданого інтеграла довелось би розбити область (D) на дві області (а в прикладі №7, навіть на чотири правильні області).

Виразимо x і y з (3.21) через u і v:

$$x=\frac{1}{2}(u-v),\quad y=\frac{1}{2}(u+v).$$

Обчислимо $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{1}{2}.$

Отже, $I = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0.$

За формулою (3.20) маємо

$$I = \iint\limits_{(D)} 2(x+y)^2 dxdy = \iint\limits_{(D')} 2u^2 \cdot \frac{1}{2} dudv = \iint\limits_{(D')} u^2 dudv = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-1}^{1} u^2 du = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{3} u^3 \Big|_{-1}^{1} dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{1} \left(1^3 - (-1)^3\right) dv = \frac{2}{3} v \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}(1 - (-1)) = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$. ▲

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Нехай в подвійному інтегралі $I = \iint\limits_{(D)} f(x,y) dxdy$ треба (чи доцільно) перейти до полярних координат r і φ за формулами $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$

де r - довжина радіус-вектора $\overline{OM}$ (рис. 37), φ-полярний кут точки M. Координатна лінія $\varphi = const$ у полярній системі координат $rO\varphi$ задає півпромінь, що виходить з початку координат, а $r = const$ - концентричні кола з центром у початку координат (рис. 38).

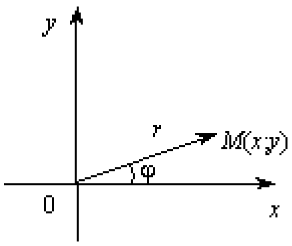


Рис. 37

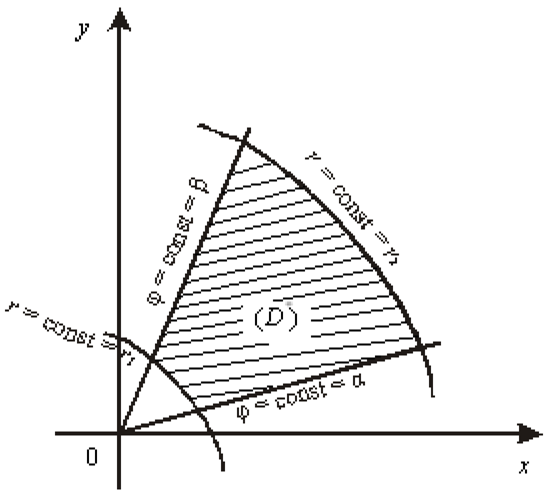


Рис. 38

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\cos\varphi.$$

Тоді якобіан:

$$I(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi-\left(-r\sin^2\varphi\right)=r\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r,$$

і $|I(r,\varphi)|=r.$ За формулою (3.20) дістанемо

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D^*)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi, \qquad (3.22)$$

де (D^*) — область (D) в полярній системі координат.

Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат зводиться до двократного інтегрування по змінним r і φ (аналогічно як і в декартовій системі координат). Можливі випадки:

●**1**^{0}. Полюс O не розташований всередині області інтегрування (D^*). Нехай область (D^*) лежить між променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ та між колами $r=r_1(\varphi)$ і $r=r_2(\varphi)$, причому $r_2(\varphi)>r_1(\varphi)$, а координатні лінії $\varphi=const$ перетинають межу області (D^*) не більше ніж у двох точках (рис. 39, або рис. 40).

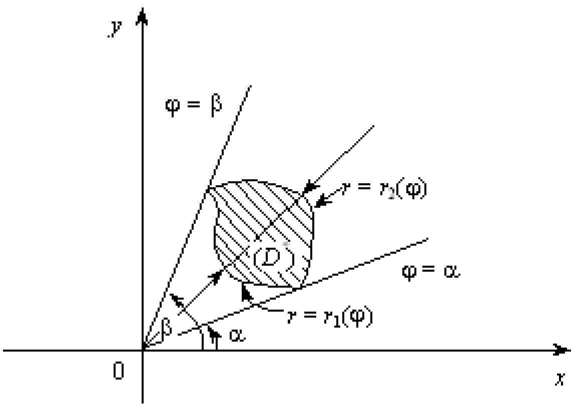


Рис. 39

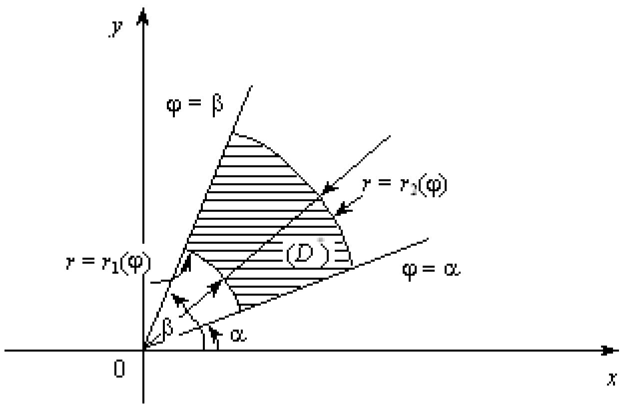


Рис. 40

У цьому випадку

$$I=\iint\limits_{(D^*)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (3.23)$$

Частинний випадок, коли $\boldsymbol{\alpha\le\varphi\le\beta},$ $r_1\le r\le r_2,$ де r_1 і r_2 - $const,$ тоді

$$I=\iint\limits_{(D^*)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr=$$

$$=\int\limits_{r_1}^{r_2}rdr\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi. \qquad (3.24)$$

●2^0. Полюс О розташований всередині області інтегрування (D^*), полярний радіус перетинає межу області не більше ніж у двох точках (рис. 41), тоді

$$I=\iint_{(D^*)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{3.25}$$

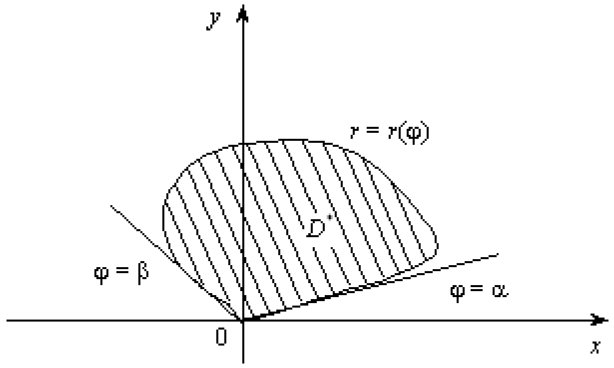


Рис. 41

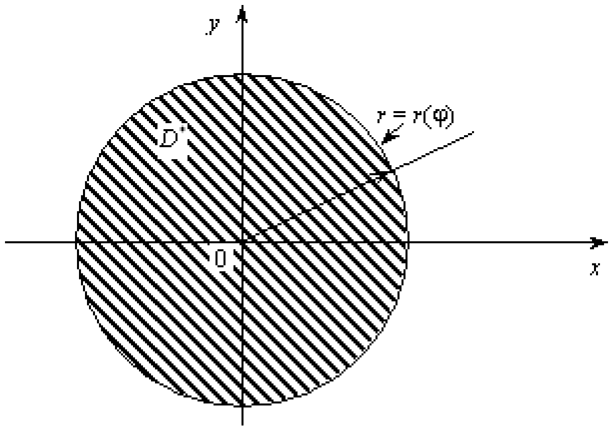


Рис. 42

Частинний випадок, коли будь — який полярний радіус перетинає межу області (D^*) в одній точці (рис. 42) тоді

$$I=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{3.26}$$

Тут $r=r(\varphi)$- полярне рівняння межі області (D^*), воно задає коло з центром у полюсі.

Зауваження : 1. Перехід від декартових координат до полярних доцільно здійснювати у випадку, коли підінтегральна функція або рівняння межі області інтегрування (D^*) містить суму x^2+y^2, або підінтегральна функція залежить від $arctg\frac{y}{x}$. У цьому разі x^2+y^2 набуває вигляду $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2$, а $arctg\frac{y}{x}=arctg\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=arctg(tg\varphi)=\varphi.$

2. На практиці немає необхідності будувати детально область (D^*), досить з'ясувати межі зміни нових координат.

Приклад

№9. Обчислити $\iint_{(D)}(x^2+y^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$ де $(D)=\{(x;y): x^2+y^2\le a^2\}.$

▼$\mathbf{1^0}$. Побудуємо лінію, що обмежує область $(D): x^2+y^2=a^2$. Область заштрихована на рис. 43.

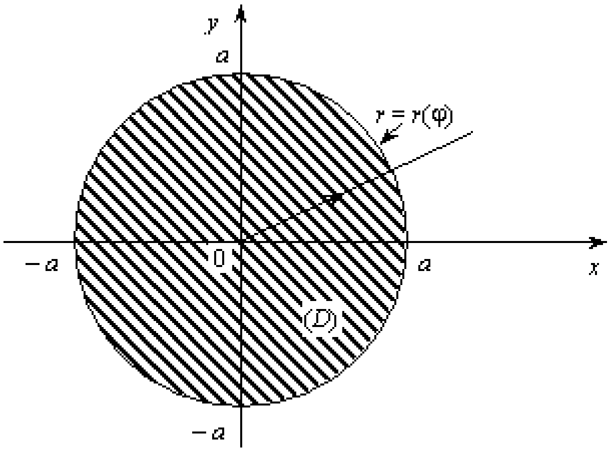


Рис. 43

2^0. Перейдемо до полярних координат за формулами $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |I| = r,$ дістанемо

$$\iint_{(D)} \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_{(D^*)} r^2\sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\varphi,$$

де (D^*)- область (D) в полярних координатах.

3^0. Запишемо рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$ в полярних координатах, для чого підставимо в рівняння кола замість $x,\ y$ значення $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$, дістанемо

$$x^2 + y^2 = a^2 \to (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2, \quad r^2 = a^2, \quad r = a.$$

Отже, межі по r: $\quad 0 \le r \le a.$

З рис. 43 видно межі по φ: $\varphi = 0,\ \ \varphi = 2\pi$, отже $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4^0. Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного за формулами (3.26):

$$\iint_{(D)} r^3\sqrt{a^2 - r^2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\sqrt{a^2 - r^2}\,dr = \left| \begin{array}{l} \text{введемо заміну змінної} \\ r = a\sin t,\ \text{знайдемо} \\ dr = a\cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} r & 0 & a \\ \hline t & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} a^3\sin^3 t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\cos t\sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 t\right)}\,dt =$$

$$= a^5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\cos^2 t\,dt = a^5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\left(1 - \cos^2 t\right)\sin t\,dt =$$

$$= -a^5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \cos^4 t\right)d(\cos t) =$$

$$= -a^5\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = -a^5\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)d\varphi = \frac{2}{15}a^5\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{15}\pi a^5.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{15}\pi a^5$.▲

Приклад №10. Обчислити $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

▼ Перейдемо до полярних координат за формулами $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$ якобіан переходу $|I| = r.$

Область (D) обмежена лініями: $x = 0, x = 1, y = 0, y = \sqrt{1-x^2}$; побудуємо їх (рис. 44).

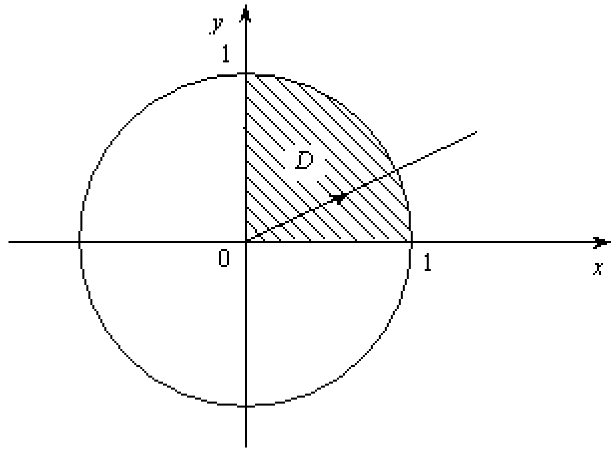


Рис. 44

Отже, область (D) в полярних координатах є (D^*): $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], r \in [0;1]$ Тоді

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{1+\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\boldsymbol{\varphi} \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\mathbf{1}+\sqrt{r^2(\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{sin}^2\boldsymbol{\varphi})}} = \int\limits_0^{\pi/2} d\boldsymbol{\varphi} \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\mathbf{1}+r} = \int\limits_0^{\pi/2} d\boldsymbol{\varphi} \int\limits_0^1 \frac{(r+\mathbf{1})-\mathbf{1}}{r+\mathbf{1}} dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\boldsymbol{\varphi} \int\limits_0^1 \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{r+\mathbf{1}}\right) dr = \int\limits_0^{\pi/2} \left(r - \mathbf{ln}(r+\mathbf{1})\right)\Big|_0^1 d\boldsymbol{\varphi} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (\mathbf{1} - \mathbf{ln}\,\mathbf{2}) d\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{1} - \mathbf{ln}\,\mathbf{2})\boldsymbol{\varphi}\Big|_0^{\pi/2} = (\mathbf{1} - \mathbf{ln}\,\mathbf{2})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}.$$

Відповідь: $(1-\ln 2)\frac{\pi}{2}.$ ▲

Приклад №11. Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2},$$

де область $(\overline{D})$ обмежена колами $x^2 + y^2 = 2x,\ \ x^2 + y^2 = 4x$ і прямими $y = x$ та $y = 2x.$

▼**1**^{0}. Побудуємо область $(\overline{D})$. Для цього перетворимо рівняння кіл, що обмежують область $(\overline{D})$:

а). $x^2+y^2=2x,\;\; x^2-2x+y^2=0,\;\; (x-1)^2+y^2=1$ — коло з центром у точці (1;0) радіуса $R=1$;

б). $x^2+y^2=4x,\;\; x^2-4x+y^2=0,\;\; (x-2)^2+y^2=4$ — коло радіуса $R=2$; з центром у точці (2;0).

Область $(\overline{D})$ обмежена ще лініями $y=x$ та $y=2x$ (рис. 45).

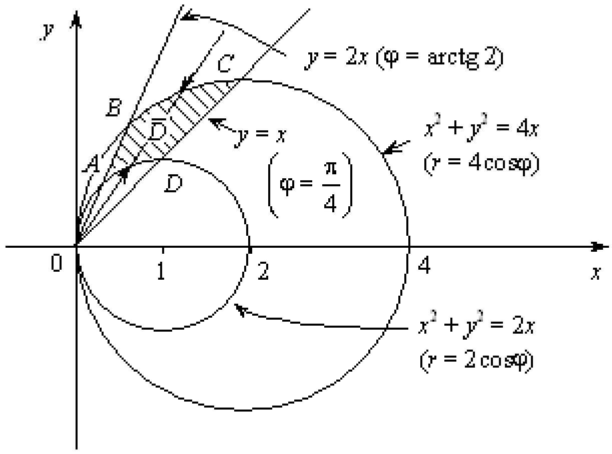


Рис. 45

2^0. Оскільки область $(\overline{D})$ є криволінійний чотирикутник $ABCD$, обмежений променями AB та CD і дугами кіл, то доцільно перейти до полярних координат за формулами

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $|I|=r$.

Перетворимо даний подвійний інтеграл в декартових координатах до подвійного інтеграла в полярних координатах за формулою (8.20):

$$I=\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\iint\limits_{(D^*)}\frac{1}{\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^2}rdrd\varphi=\iint\limits_{(D^*)}\frac{1}{r^3}drd\varphi. \tag{3.27}$$

3^0. Запишемо рівняння меж області $(\overline{D})$ в полярних координатах (отже, рівняння ліній (D^*)):

а) відрізок $DC: y=x,\;\; r\sin\varphi=r\cos\varphi,\;\; tg\varphi=1,\;\; \varphi=\dfrac{\pi}{4}$;

б) відрізок $AB: y=2x,\;\; r\sin\varphi=2r\cos\varphi,\;\; tg\varphi=2,\;\; \varphi=arctg2$;

в) дугу $AD: x^2+y^2=2x,\;\; r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=2r\cos\varphi,\;\; r=2\cos\varphi$,

г) дугу $BC: x^2+y^2=4x,\;\; r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi,\;\; r=4\cos\varphi$.

Запишемо область (D^*) в полярних координатах (рис. 45) за допомогою нерівностей

$$(D^*)=\left\{(r,\varphi): \frac{\pi}{4}\le\varphi\le arctg2,\quad 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi\right\}.$$

4^0. Перетворемо подвійний інтеграл, що стоїть в правій частині рівності (3.27), в повторний, розставляючи межі інтегрування і обчислимо повторний інтеграл:

$$\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\iint\limits_{\left(D^*\right)}\frac{1}{r^3}drd\varphi=\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\frac{dr}{r^3}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{arctg2}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}r^{-3}dr=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}\frac{r^{-2}}{-2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}\frac{1}{r^2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}\left(\frac{1}{16\cos^2\varphi}-\frac{1}{4\cos^2\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}\frac{-3}{16\cos^2\varphi}d\varphi=\frac{3}{32}\int\limits_{\pi/4}^{arctg2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{3}{32}tg\varphi\Bigg|_{\pi/4}^{arctg2}=\frac{3}{32}\left(tgarctg\,2-tg\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{32}(2-1)=\frac{3}{32}.$$

Відповідь: $\frac{3}{32}$. ▲

Приклад № 12.

Обчислити $\iint\limits_{(D^*)}x^2dxdy$, де область (D)- внутрішня частина лемніскати $r^2=\cos2\varphi$

▼$\mathbf{1}^0$. Будуємо область, обмежену лінією $r^2=\cos2\varphi$. Область визначення знаходимо з умови $\cos2\varphi\geq 0$ $\left(r^2\geq 0\right)$: $2\pi k-\frac{\pi}{2}\leq 2\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$

звідки дістанемо $\pi k-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}+\pi k.$ Область визначення розбивається на сектори в залежності від значень k:

$k=0$: $-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$; $k=1$: $\frac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{4}$;

$k=2$: $2\pi-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq 2\pi+\frac{\pi}{4}.$

Сектор при $k=2$ співпадає з сектором при $k=0$, а при $k=3$ – з сектором при $k=1$ і т. ін. Іншими словами, різних секторів буде тільки два. Зовні від цих секторів $r^2<0$, що неможливо.

$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$:

φ	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

$\varphi\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$:

φ	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
r	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Будуємо область $\left(D^*\right)$ (рис. 46), використовуючи таблиці.

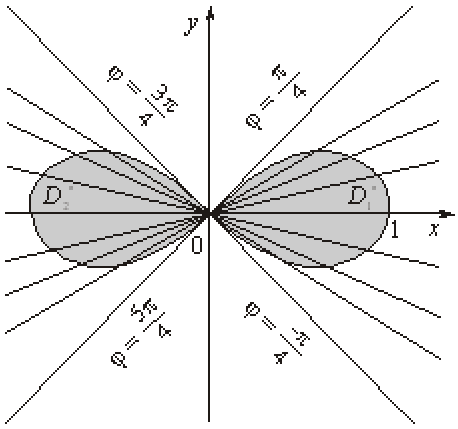


Рис. 46

2^0. З рис. 46 маємо $(D^*)=\left\{(\varphi,r):\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right],\ 0\le r\le\sqrt{\cos 2\varphi}\right\}.$

3^0. Перетворимо подвійний інтеграл в декартових координатах до подвійного в полярних, а його — до повторного по області (D^*) (заштрихована на рис. 46), яка складається з двох однакових областей (доцільно брати два інтеграла по одній із рівних областей (D_1^*) чи (D_2^*), $(D_1^*)=\left\{(r,\varphi):-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \ 0\le r\le\sqrt{\cos 2\varphi}\right\}$:

$$\iint\limits_{(D)} x^2dxdy=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}r^2\cos^2\varphi\cdot rdr=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}r^3dr=$$

$$=2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2\varphi\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2\varphi\cdot\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos2\varphi}{2}\cos^2 2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos4\varphi}{2}d\varphi+\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\varphi\cdot\cos2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}+\frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-\sin^2 2\varphi\right)d(\sin2\varphi)=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\pi-\frac{1}{4}\sin(-\pi)\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\sin2\varphi-\frac{1}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\left(1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{6}=\frac{3\pi+8}{48}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi+8}{48}$. ▼

---

[1] Якобі К. (1804—1851) — німецький математик. Сільвестр назвав функціональний визначник якобіаном, щоб віддати значну пошану роботам К. Якобі з алгебри і теорії виключень. Самою відомою із робіт Якобі в цій області є стаття “Про побудову і властивості визначників”, 1841.

Список використаних джерел

1. Клочко В. М., Кравчук В. О. Вища математика : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2021. 384 с.
2. Шинкарик М. І., Ковальчук І. В. Вища математика для технічних спеціальностей : навч. посіб. Тернопіль : ТНТУ, 2020. 320 с.
3. Мартинюк П. М. Математичний аналіз : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2021. 456 с.
4. Бойко І. В., Олійник О. М. Вища математика : диференціальне та інтегральне числення : навч. посіб. Харків : ХНАДУ, 2022. 300 с.
5. Кузьменко О. В. Вища математика : практикум. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 250 с.
6. Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського». Вища математика : дистанційний курс. 2021. URL: https://do.ipo.kpi.ua (дата звернення: 02.04.2026).
7. Prometheus. Вища математика для студентів. 2022. URL: https://prometheus.org.ua (дата звернення: 02.04.2026).
8 . Prometheus — Вища математика для студентів
Онлайн-курс із темами з математичного аналізу, включно з інтегральним численням.
URL: https://prometheus.org.ua (дата звернення: 02.04.2026)
9. Coursera / Google Coursera — Вища математика (українською)
Локалізовані та адаптовані курси з математичного аналізу та інтегралів.
URL: https://www.coursera.org
10. Освітній проєкт «Math UA» — Вища математика онлайн
Відео-лекції, тести та практичні завдання з тем математичного аналізу.
URL: https://mathua.org (дата звернення: 02.04.2026)
11. Модуль «Інтегральне числення» на платформі EdEra
Відео-уроки з теорії та практики інтегралів для технічних спеціальностей.
URL: https://ed-era.com (дата звернення: 02.04.2026)

МАРЧУК Наталія Анатоліївна

СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна

«Інтегральне числення»

Методичні рекомендації
для здобувачів першого бакалаврського рівня
вищої освіти
за спеціальністю Н7«Агроінженерія»