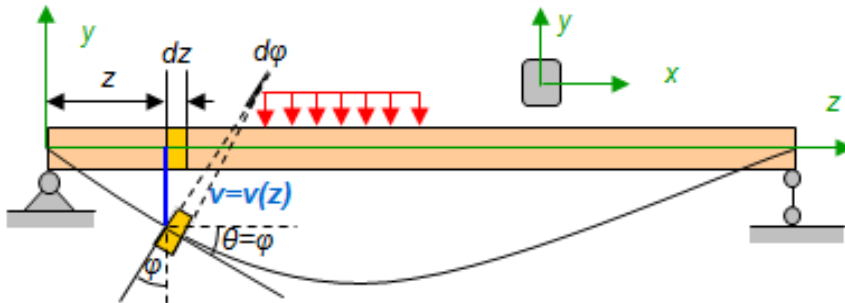
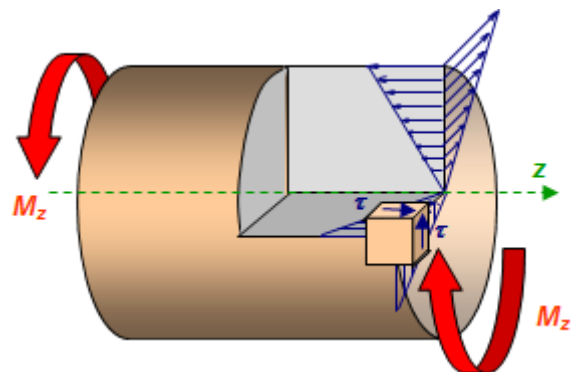
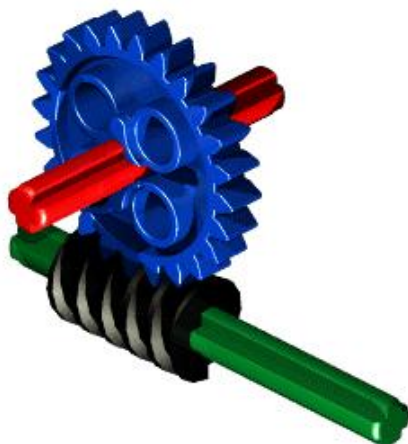




МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

ЧАСТИНА 2

Методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей: 208 «Агроінженерія»,
274 «Автомобільний транспорт»



УДК 621.791.052

Укладачі :

Ткачук Василь Сергійович,

кандидат технічних наук, доцент

Девін Владлен В'ячеславович,

кандидат технічних наук, доцент

Бурдега Василь Юрійович,

кандидат технічних наук, доцент

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
закладу вищої освіти «Подільський державний університет»
(протокол № ____ від _____ 2025 року)*

Рецензенти:

Шелудченко Леся Сергіївна, завідувач кафедри транспортних технологій та засобів АПК
ЗВО «Подільський державний університет», докторка технічних наук, професорка

Павельчук Юрій Федорович, заступник начальника Кам'янець-Подільського ліцею з
поширеною військово-фізичною підготовкою, кандидат технічних наук, доцент

Методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій», частина 2, для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей: 208 «Агроінженерія», 274 «Автомобільний транспорт» В.С. Ткачук, В.В. Девін, В.Ю. Бурдега. Кам'янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 2025. 80 с.

Методичні рекомендації призначені для проведення практичних занять і самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей: 208 «Агроінженерія», 274 «Автомобільний транспорт» при вивченні навчальної дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій». Розглянуто розрахунок статично невизначних систем, систем складного опору, стійкості, уданої дії навантаження, розрахунки при динамічних навантаженнях. Методичні рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Задача № 1. Статично невизначувана балка.....	5
Задача № 2. Неплоский згин.....	17
Задача № 3. Позацентровий стиск.....	32
Задача № 4. Розрахунок круглого вала на згин з крученням.....	40
Задача № 5. Проектувальний розрахунок на стійкість стиснутих стержнів.....	49
Задача № 6. Розрахунок на міцність при ударі.....	58
Задача № 7. Вимушені коливання лінійної системи з одним ступенем вільності за відсутності тертя.....	63
Задача № 8. Розрахунок на міцність при повторно-змінному навантаженні круглого вала на згин з крученням.....	71
Список використаних джерел	78
Додатки.....	79

ВСТУП

Механіка матеріалів і конструкцій – одна з найважливіших дисциплін, що вивчаються студентами у вищих технічних навчальних закладах.

Користуючись законами теоретичної механіки й відповідним математичним апаратом, механіка матеріалів і конструкцій розглядає питання міцності, жорсткості та стійкості машин і споруд.

Методичні вказівки призначені для проведення практичних занять, самостійної роботи студентів при підготовці до практичних занять і виконання розрахунково-графічного завдання. Вони містять теоретичні положення і вихідні дані для завдання. Перш ніж приступити до виконання завдання, слід ознайомитися з прикладами розв'язання задач і теоретичним матеріалом, викладеними у цих методичних вказівках та списку літератури.

Розрахунково-графічну роботу необхідно виконувати на листах креслярського або писального паперу формату А4 і оформити у вигляді підшивки з титульним аркушем. На титульному аркуші вказуються: назва роботи, факультет, курс, група, прізвище і ініціали студента.

Перед розв'язком кожної задачі потрібно виписати її умову з числовими даними, і дати креслення з числовими розмірами, строго дотримуючись масштабу. Рішення повинне супроводжуватися короткими, послідовними і грамотними поясненнями і акуратними схемами. При ускладненнях, що зустрічаються в ході виконання розрахунково-графічних робіт, корисно звертатися до аналогічних завдань, наявних в підручниках.

Результати розрахунків, схеми і малюнки виконуються олівцем, кульковою ручкою або тушшю на одній стороні аркуша формату А4. Усі арифметичні обчислення слід проводити з достатньою, але не зайвою точністю.

Після виконання розрахунково-графічної роботи студент здає її на перевірку викладачеві. Після отримання перевіреної роботи студент повинен виправити усі помилки з урахуванням усіх зроблених зауважень. Виправлення, виконані на окремих листах, слід вкласти у відповідні місця відрецензованої роботи. Окремо від роботи виправлення не розглядаються. Студент зобов'язаний зберегти до заліку і іспиту усі виконані і захищені розрахунково-графічні роботи.

ЗАДАЧА 1

СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНА БАЛКА

Для заданої балки (рис. 1.1, табл. 1.1) підібрати переріз заданої форми і визначити зазначене переміщення перерізу A .

Таблиця 1.1. Варіанти завдань до задачі 1

Варіант	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	P , кН	M , кН·м	Переміщення	Матеріал	Форма перерізу
0	25	0	-10	30	w_A	Сталь10	I
1	0	-20	15	20	θ_A	Сталь60	□
2	-15	0	20	10	w_A	Сталь50	⏏
3	0	25	-25	40	θ_A	Сталь30	I
4	10	0	30	-50	w_A	Сталь20	Π
5	0	-15	35	10	θ_A	Сталь20Г	□
6	-20	0	40	20	w_A	Сталь25	⏏
7	0	10	-30	30	θ_A	Сталь30Г	Π
8	20	0	10	-40	w_A	Сталь35	□
9	0	-10	20	50	θ_A	Сталь50Г	⏏

План розв'язування задачі

1. Розкрити статичну невизначуваність балки методом рівняння трьох моментів або за допомогою канонічних рівнянь методу сил. В останньому випадку перш за все необхідно побудувати найбільш раціональний варіант еквівалентної розрахункової схеми.

2. Перевірити правильність розкриття статичної невизначуваності балки (коли невизначуваність балки розкривається обома методами, перевірку можна не робити).

3. Для еквівалентної розрахункової схеми побудувати епюру згинальних моментів.

4. Підібрати з умови міцності за нормальними напруженнями розміри поперечного перерізу балки вказаної форми (підібрати за сортаментом відповідний профіль).

5. Визначити вказане переміщення перерізу A методом Мора або Верещагіна.

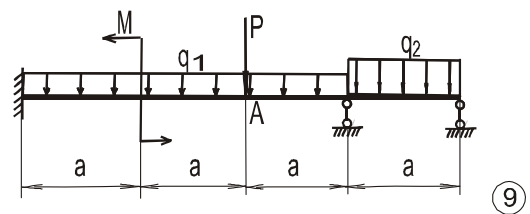
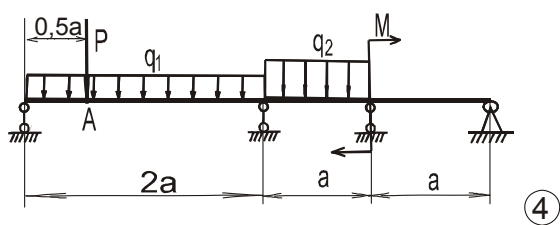
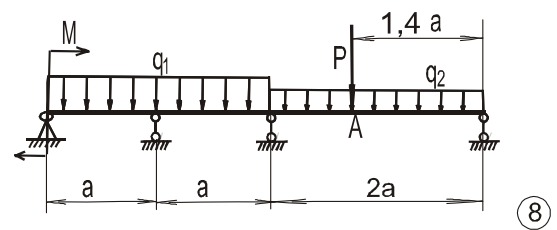
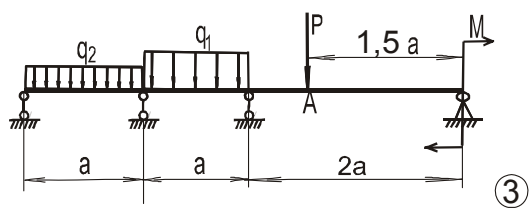
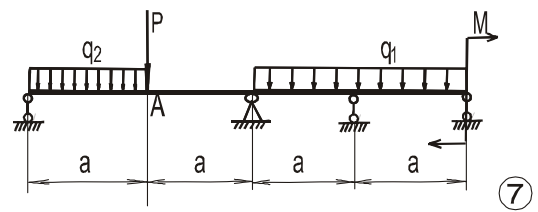
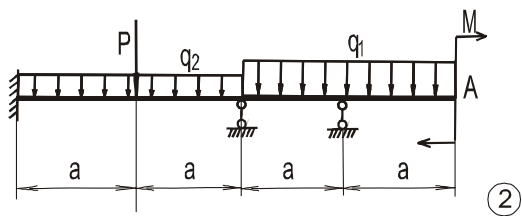
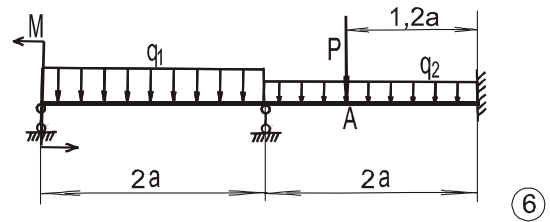
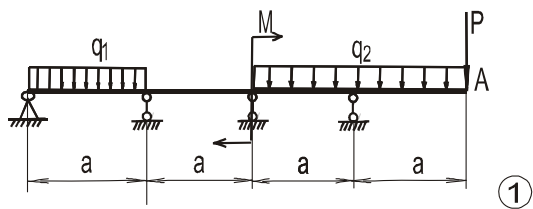
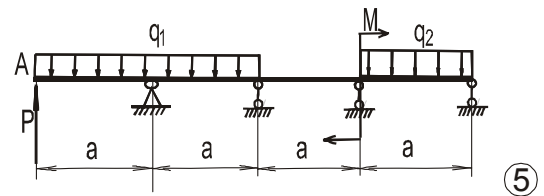
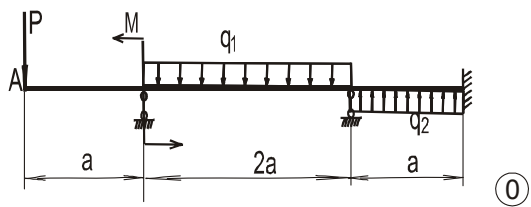


Рис. 1.1. Варіанти розрахункових схем балок до задачі 1

Розв'язання задачі

Для заданої балки (рис. 1.2, а) підібрати прямокутний переріз ($h/b = 2$). Визначити вертикальне переміщення перерізу А. При цьому $EI = \text{const}$ для всієї балки, а матеріал балки – сталь 20, для якої допустиме напруження на розтяг $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Балка два рази статично невизначувана.

1А. Розкриємо статичну невизначуваність за допомогою методу трьох моментів, зайвими невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах, а рівняння трьох моментів матиме вигляд

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Пронумеруємо опори та прогони балки (опори, починаючи з нуля, прогони – з одиниці). На рис. 1.2, б показана еквівалентна система, тобто основана система, яку завантажено заданим навантаженням і згинальними моментами в опорних перерізах. Побудуємо епюри згинальних моментів для окремих балок основної системи тільки від заданого навантаження (епюри M_P) (рис. 1.2, в).

Для першої проміжної опори записуємо рівняння трьох моментів ($n = 1$):

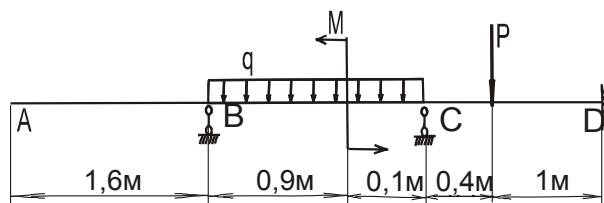
$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right),$$

при цьому

$$\begin{aligned} \omega_1 a_1 &= \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1,875 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,9 - \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot \left(0,9 + \frac{1}{3} \cdot 0,1 \right) = \\ &= 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

$$\omega_2 b_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 7,14 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7,14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

а) Задана балка

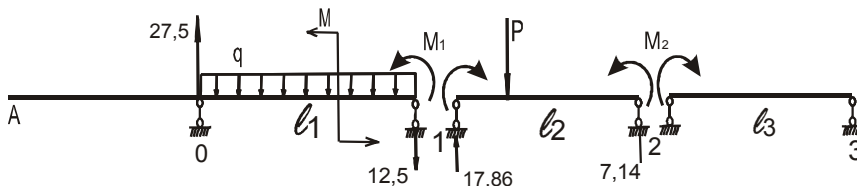


$$P=25\text{кН}$$

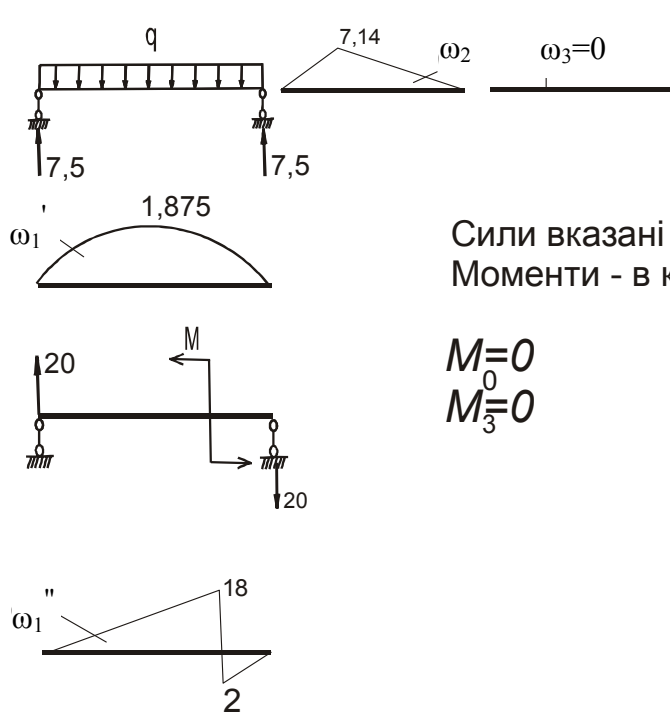
$$M=20\text{кНм}$$

$$q=15\text{кН/м}$$

б) Еквівалентна система



в) Епюри M_P ,
кН·м
для окремих
балок

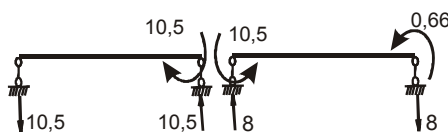


Сили вказані в кН
Моменти - в кНм

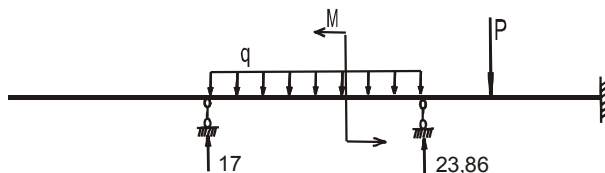
$$M_0=0$$

$$M_3=0$$

г) Окремі балки, навантажені
моментами M_1, M_2



д) Еквівалентна система



е) Епюра M , кН·м

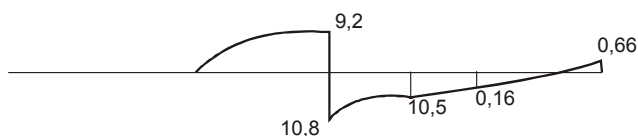


Рис. 1.2. До методу трьох моментів

Тоді рівняння трьох моментів для першої проміжної опори матиме вигляд

$$2M_1 \cdot (1 + 1,4) + M_2 \cdot 1,4 = -6 \cdot \left(\frac{5,4}{1} + \frac{4}{1,4} \right),$$

звідси

$$3,43M_1 + M_2 = -35,39.$$

Запишемо рівняння трьох моментів для другої проміжної опори ($n = 2$):

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right),$$

де

$$\omega_2 a_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 7,14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7,14 \cdot \left(0,4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді для другої проміжної опори рівняння трьох моментів виглядає:

$$1,4M_1 + 2,8M_2 = -6 \cdot \left(\frac{3}{1,4} \right)$$

або

$$M_1 + 2M_2 = -9,18.$$

Отже маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3,43M_1 + M_2 = -35,39, \\ M_1 + 2M_2 = -9,18. \end{cases}$$

Звідси

$$M_1 = -10,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_2 = 0,66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначимо реакції в опорах 0 і 1. Для цього розглянемо прості балки, навантажені лише знайденими моментами M_1 та M_2 , і обчислимо реакції

від дії цих моментів (рис. 1.2, *з*). Враховуючи ці реакції разом з реакціями від зовнішнього навантаження, які показані попередньо на тому ж рис. 1.2, *б*, знайдемо:

$$R_B = 27,5 - 10,5 = 17 \text{ кН},$$

$$R_C = -12,5 + 17,86 + 10,5 + 8 = 23,86 \text{ кН}.$$

1Б. Розкриємо статичну невизначуваність балки за допомогою канонічних рівнянь методу сил.

Основну систему візьмемо, відкинувши зайві зв'язки, приймаючи за такі шарнірно-рухомі опори в перерізах *B* і *C* (рис. 1.3, *б*).

Завантаживши основну систему заданим навантаженням та зайвими невідомими X_1 та X_2 , отримаємо еквівалентну систему (рис. 1.3, *в*).

Канонічні рівняння методу сил для два рази статичної невизначуваної балки мають вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

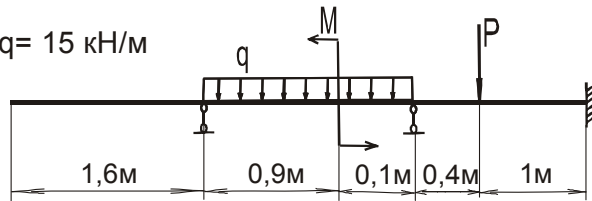
Коефіцієнти та вільні члени цієї системи рівнянь обчислимо методом Верещагіна:

$$\Delta = \sum \frac{\omega \overline{M}_c}{EI}.$$

Для цього треба основну систему спочатку завантажити заданим навантаженням і отримати силову систему, для якої побудувати епюру згинальних моментів M_P . Розшарована епюра M_P показана на рис. 1.3, *з*. Наступним етапом завантажуюмо основну систему одиничною силою $\overline{X}_1 = 1$ і будуємо епюру згинальних моментів $\overline{M}_1$ для цієї одиничної системи, а далі основну систему завантажуюмо одиничною силою $\overline{X}_2 = 1$ і будуємо епюру згинальних моментів $\overline{M}_2$. Обидві епюри показані на рис. 1.3, *д*, *е*.

$P=25\text{кН}$; $M=20\text{кНм}$; $q= 15 \text{ кН/м}$

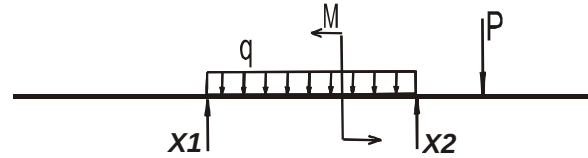
а) Задана балка



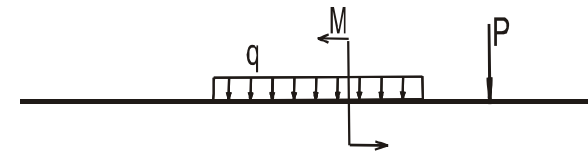
б) Основна система



в) Еквівалентна система

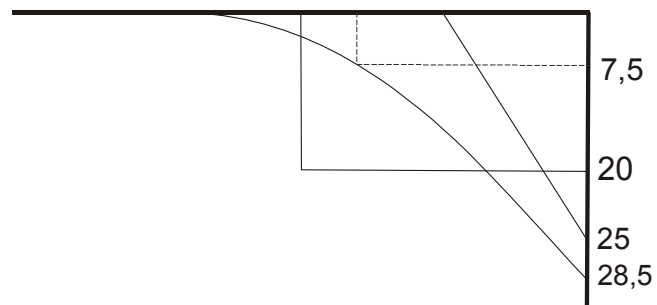


г) Силова система



та розширована

епюра M_P , кН·м

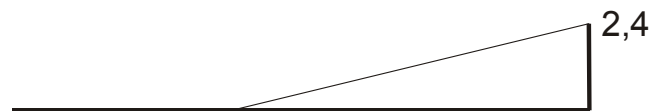


д) Одинична система

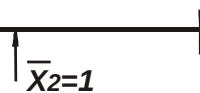


та

епюра $\overline{M}_1$, м



е) Одинична система



та

епюра $\overline{M}_2$, м



Рис. 1.3. До методу сил

Визначимо коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь за методом Верещагіна:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 = 4,608 \text{ м}^3,$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,4\right) = 1,894 \text{ м}^3,$$

$$EI\Delta_{1P} = -\frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 - 7,5 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1,4\right) - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,4\right) - \\ - 20 \cdot 1,5 \cdot \left(0,9 + \frac{1}{2} \cdot 1,5\right) - \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 1 \cdot \left(1,4 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) = -123,39 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 = 0,914 \text{ м}^3,$$

$$EI\Delta_{2P} = -7,5 \cdot 1,4 \cdot 0,7 - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 - 20 \cdot 1,4 \cdot 0,7 - \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 1 \cdot \left(0,4 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \\ = 54,00 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Тоді канонічні рівняння методу сил приймають такий вигляд:

$$\begin{cases} 4,6X_1 + 1,894 - 123,39 = 0, \\ 1,894X_1 + 0,914X_2 - 54,00 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$R_B = X_1 = 17 \text{ кН}, \quad R_C = X_2 = 23,86 \text{ кН}.$$

Відмітимо, що ці результати збігаються з попередніми результатами, які мають місце при розкритті статичної невизначуваності методом трьох моментів. Тому додаткова перевірка цих даних не потрібна, а еквівалентна система виглядає, як показано на рис. 1.2, *д*.

Будуємо епюру згинальних моментів M для еквівалентної системи, тобто для заданої балки, яка представлена на рис. 1.2, *е*. Максимальний

згинальний момент, що діє в небезпечному перерізі, $M_{\max} = 10,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

3. Підберемо розміри прямокутного перерізу з $h/b = 2$. Умова міцності для небезпечного перерізу має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

звідси

$$[W] = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,675 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 67,5 \text{ см}^3.$$

Для прямокутника

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 67,5 \text{ см}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{67,5 \cdot 12} = 9,4 \text{ см}, \quad b = \frac{h}{2} = 4,7 \text{ см}.$$

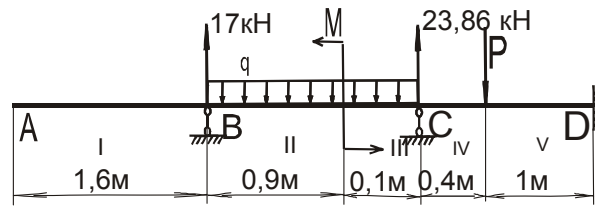
Момент інерції прямокутного перерізу відносно осі z :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,7 \cdot 9,4^3}{12} = 325,3 \text{ см}^4.$$

4. Визначим вертикальне переміщення перерізу A методом Мора. Для цього розглянемо еквівалентну балку і одиничну систему (рис. 1.4). Одиничну систему отримаємо, приклавши до еквівалентної системи одиничну вертикальну силу в перерізі A :

Запишемо вирази для згинальних моментів M від зовнішнього навантаження та обчислених реакцій шарнірно рухомих опор та вирази згинальних моментів $\bar{M}$ від одиничної сили, яка прикладена в перерізі A . На кожній ділянці ці вирази M та $\bar{M}$ мають вигляд:

Еквівалентна
(задана) балка



$$\begin{aligned} P &= 25 \text{ кН}; \\ M &= 20 \text{ кНм}; \\ q &= 15 \text{ кН/м} \end{aligned}$$

Одинична
система

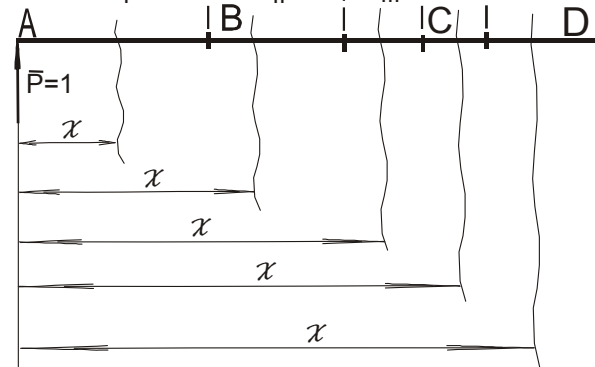


Рис. 1.4. До визначення переміщення перерізу A

ділянка I ($0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}$):

$$\begin{cases} M(x) = 0, \\ \overline{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка II ($1,6 \text{ м} \leq x \leq 2,5 \text{ м}$):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - \frac{q(x - 1,6)^2}{2}, \\ \overline{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка III ($2,5 \text{ м} \leq x \leq 2,6 \text{ м}$):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - \frac{q(x - 1,6)^2}{2} - M, \\ \overline{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка IV ($2,6 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - q(x - 2,1) - M + 23,86(x - 2,6), \\ \overline{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка V ($3 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6) - P(x-3), \\ \overline{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

Інтеграл Мора для визначення $w_{A \text{ верт}}$ має вигляд:

$$w_{A \text{ верт}} = \frac{1}{EI} \sum_l \int_l M(x) \overline{M}(x) dx,$$

де

$$EI = \text{const} = 2 \cdot 10^{11} \cdot 325,3 \cdot 10^{-8} = 650,6 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\begin{aligned} w_{A \text{ верт}} &= \frac{1}{EI} \left(\int_{1,6}^{2,5} \left(17(x-1,6) - \frac{q(x-1,6)^2}{2} \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,5}^{2,6} \left(17(x-1,6) - \frac{q(x-1,6)^2}{2} - M \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,6}^3 \left(17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6) \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 \left(17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6) - P(x-3) \right) x dx = \right. \\ &= \frac{1}{650,6 \cdot 10^3} \left(\int_{1,6}^{2,5} \left(17(x-1,6) - \frac{15(x-1,6)^2}{2} \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,5}^{2,6} \left(17(x-1,6) - \frac{15(x-1,6)^2}{2} - 20 \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,6}^3 \left(17(x-1,6) - 15(x-2,1) - 20 + 23,86(x-2,6) \right) x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 \left(17(x-1,6) - 15(x-2,1) - 20 + 23,86(x-2,6) - 25(x-3) \right) x dx = \right. \\ &= 0,00537 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,00537 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Контрольні запитання

1. Які балки називають статично невизначеними та у якій послідовності їх треба розраховувати?
2. Як треба створювати основну систему та якою вона повинна бути?
3. Які рівняння треба скласти, щоб однозначно визначити основні невідомі (ОН)?
4. Які балки називають нерозрізними та як найпростіше визначити їх ступінь статичної невизначеності (ССН)?
5. Як утворюється найбільш раціональна основна система (ОС) для нерозрізної балки?
6. Як записується „рівняння трьох моментів” для проміжної шарнірно-рухомої опори нерозрізної балки та який фізичний зміст воно має?
7. Як записуються додаткові рівняння для жорстких (глухих) защемлень нерозрізної балки?
8. Як враховується зосереджений момент, прикладений на проміжній шарнірно-рухомій опорі нерозрізної балки?
9. Як при запису „рівняння трьох моментів” враховується вплив консолі?
10. Як перевіряється правильність визначення основних невідомих (опорних моментів) нерозрізної балки ?
11. Як визначаються опорні реакції на проміжних опорах нерозрізної балки ?
12. У якому порядку треба розраховувати нерозрізні балки?
13. Які ви знаєте методи визначення прогинів і кутів повороту поперечних перерізів балки?
14. Як записується умова жорсткості та як визначається допустиме значення стріли прогину для прольоту та консолі?

ЗАДАЧА 2

НЕПЛОСКИЙ ЗГИН

На балку діє просторова система сил (рис. 2.1, табл. 2.1). З умови міцності дібрати безпечний переріз балки вказаної форми. Вважаючи осі y і z (рис. 2.1) головними центральними осями заданого перерізу, розташувати його найраціональнішим чином. У небезпечному перерізі знайти положення нейтральної лінії і побудувати сумарну епюру розподілу напружень. Визначити величину та напрямок повного прогину у вказаному перерізі A . Взяти $a = 1 \text{ м}$, $n_T = 1,5$.

Таблиця 2.1. Варіанти завдань до задачі 2

Варіант	q , кН/м	P , кН	M , кН·м	α , рад	Переріз	Матеріал
0	10	12	-14	$\pi/3$	$\square$	Сталь 10
1	12	-14	18	$\pi/6$	J	Сталь 20
0	10	12	-14	$\pi/3$	$\square$	Сталь 10
3	18	25	30	$3\pi/4$	$\square$	Сталь 30
4	2	-6	8	$5\pi/6$	J	Сталь 35
5	6	10	-10	$4\pi/3$	Π	Сталь 40
6	4	8	12	$5\pi/4$	$\square$	Сталь 45
7	8	15	-15	$7\pi/3$	J	Сталь 50
8	16	-18	-30	$\pi/4$	Π	Сталь 55
9	20	40	50	$7\pi/6$	$\square$	Сталь 60

План розв'язування задачі

1. Зобразити в масштабі розрахункову схему.
2. Розкласти всі навантаження на складові, що діють у головних площинах xy та xz .
3. Побудувати епюри згинальних моментів M_y і M_z (поперечними силами Q_y і Q_z в розрахунках на міцність та жорсткість знехтувати).
4. Визначити небезпечний переріз балки.

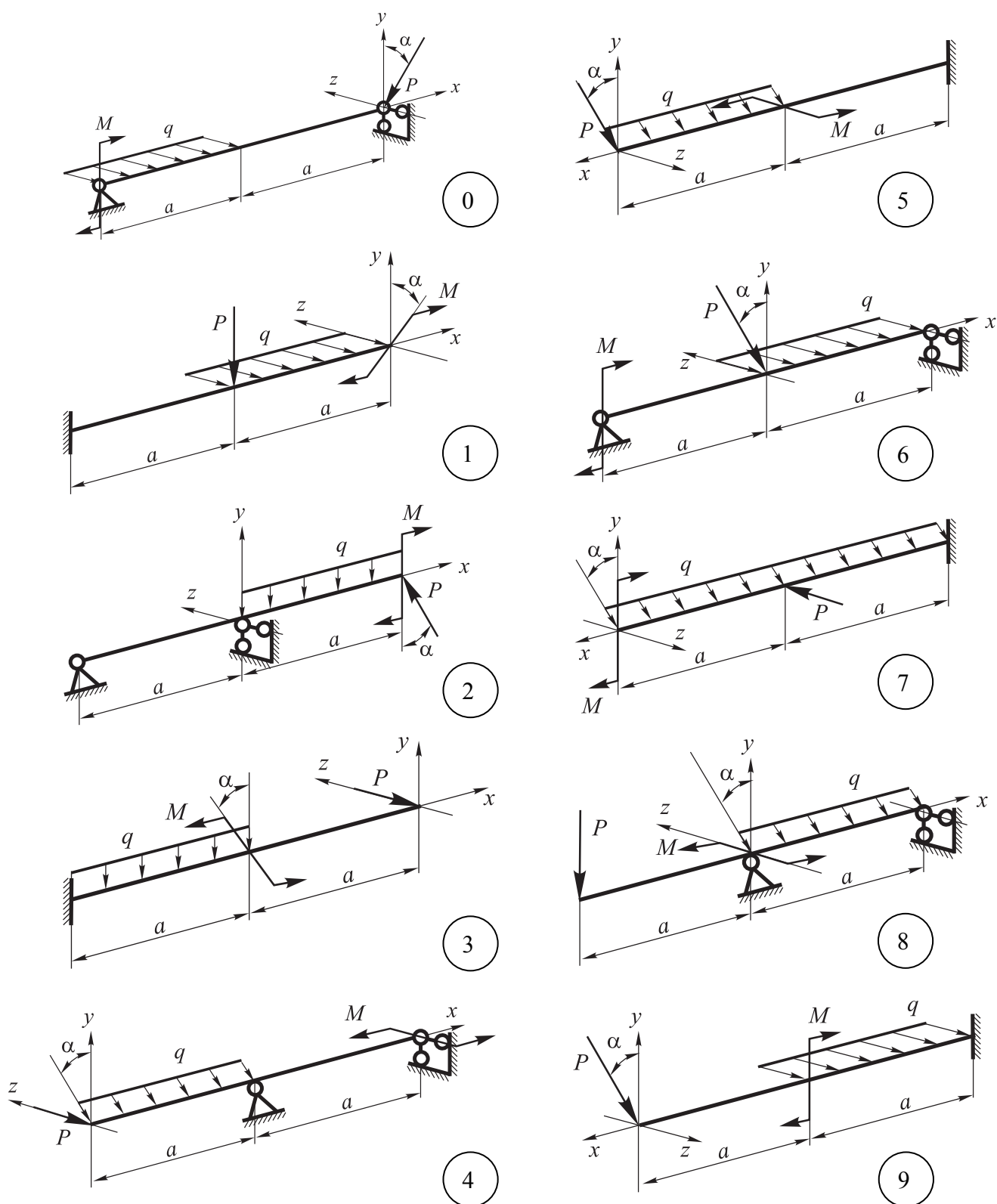


Рис. 2.1. Варіанти розрахункових схем балок до задачі 2

5. Вибрати раціональне розташування перерізу вказаної форми.
6. Методом послідовних наближень дібрати переріз з розрахунку на міцність за нормальними напруженнями.
7. Визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі і побудувати епюру сумарних напружень.
8. Будь-яким з відомих методів визначити прогини балки в перерізі A у головних площинах xu та xz , а потім обчислити величину повного прогину та знайти його напрямок у вибраній системі координат. Для цього слід накреслити переріз в масштабі, векторну діаграму переміщень його центру мас, зобразивши в певному масштабі знайдені вектори переміщень у головних площинах, та знайти вектор сумарного переміщення. Обчислити кут його нахилу відносно однієї з головних осей.

Розв'язання задачі

Дано (рис. 2.2): $q = 10 \text{ кН/м}$, $P = 20 \text{ кН}$, $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $a = 1 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, переріз – $[\text{I}]$ (два швелери), матеріал – сталь 20 з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ та границею текучості $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$, коефіцієнт запасу міцності $n_T = 1,5$.

1. Зобразимо розрахункову схему, розклавши попередньо всі сили на складові, що діють у головних площинах xu та xz (рис. 2.3).

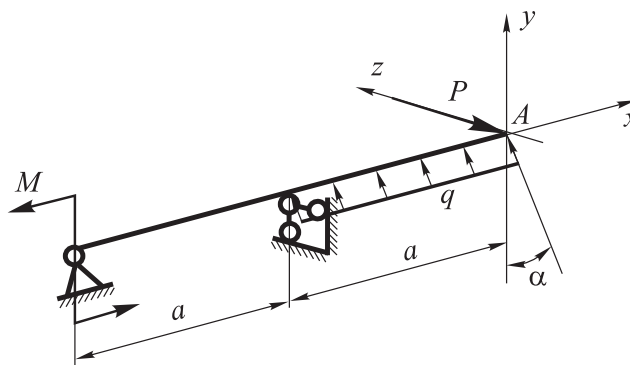


Рис. 2.2. Розрахункова схема балки для умов неплоского згину

В даному прикладі слід розкласти лише рівномірно розподілене навантаження q :

$$q_y = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,66 \text{ кН/м};$$

$$q_z = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН/м}.$$

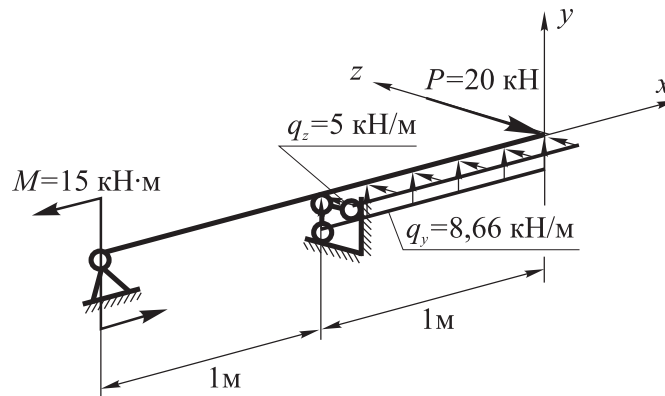


Рис. 2.3. Розрахункова схема балки модифікована

2. Визначаємо опорні реакції в кожній площині з умов рівноваги балки (розрахункові схеми подані на рис. 2.4).

У площині xy :

$$\sum M_{zB} = R_{Cy} \cdot 1 - M - q_y \cdot 1 \cdot 0,5 = R_{Cy} \cdot 1 - 15 - 8,66 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_{zC} = -M + R_{By} \cdot 1 - q_y \cdot 1 \cdot 1,5 = -15 + R_{By} \cdot 1 - 8,66 \cdot 1 \cdot 1,5 = 0.$$

Звідси $R_{Cy} = 19,33 \text{ кН}$, $R_{By} = 27,99 \text{ кН}$.

У площині xz :

$$\sum M_{yB} = R_{Cz} \cdot 1 - P \cdot 1 + q_z \cdot 1 \cdot 0,5 = R_{Cz} \cdot 1 - 20 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_{yC} = R_{Bz} \cdot 1 - P \cdot 2 + q_z \cdot 1 \cdot 1,5 = R_{Bz} \cdot 1 - 20 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1,5 = 0.$$

Звідси $R_{Cz} = 17,5 \text{ кН}$, $R_{Bz} = 32,5 \text{ кН}$.

3. Побудуємо в площинах xu та xz епюри згинальних моментів M_y і M_z . Для цього запишемо вирази для згинальних моментів для кожної ділянки у відповідних площинах. Ці вирази нам знадобляться також при визначенні прогинів балки у заданому перерізі A .

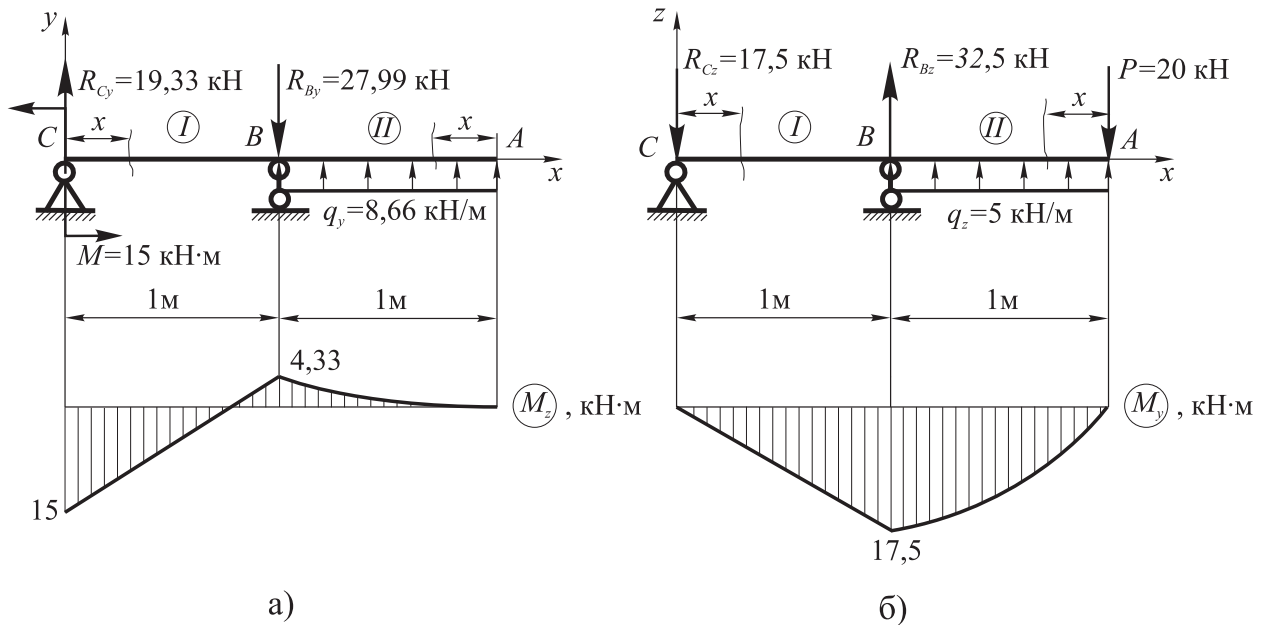


Рис. 2.4. Епюри згинальних моментів

У площині xu :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad M_z(x) = -M + R_{Cy} \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad M_z(x) = \frac{q_y x^2}{2}.$$

У площині xz :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad M_y(x) = -R_{Cz} \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad M_y(x) = \frac{q_z x^2}{2} - P \cdot x.$$

Підставляючи числові значення в отримані рівняння, будуємо епюри згинальних моментів M_z і M_y (див. рис. 2.4, а і б відповідно).

4. Аналізуючи епюри згинальних моментів, приходимо до висновку, що небезпечним є переріз B . Тут діють моменти $M_{yB} = M_{y\max} = 17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і $M_{zB} = 4,33 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Інші перерізи, згідно з епюрами моментів, менш навантажені. Тому саме для цього перерізу і проведемо необхідні розрахунки, пов'язані з добором безпечних розмірів швелерів та раціональним розташуванням перерізу, з них складеного, відносно головних осей інерції.

5. Почнемо розрахунки з вибору раціонального розташування перерізу балки заданої форми відносно осей y і z . При цьому керуватимемось такими міркуваннями.

Оскільки в площині xz діє більший за абсолютною величиною згинальний момент M_y , то саме в цій площині розмістимо висоту перерізу. Адже в цьому випадку більшому згинальному моменту відповідатиме більший момент опору перерізу (рис. 2.5).

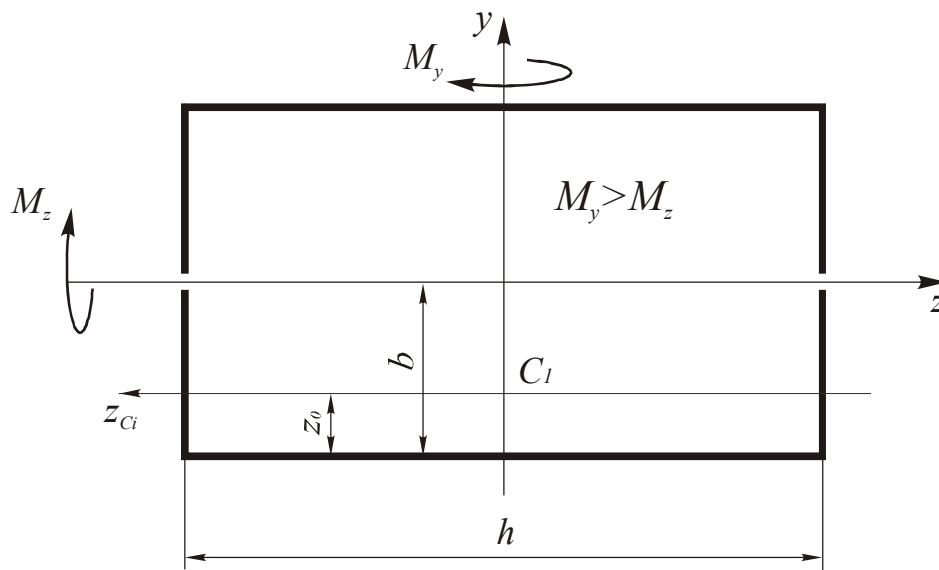


Рис. 2.5. Схема раціонального розташування перерізу балки відносно заданої системи координат

6. Як відомо, для такого типу перерізів небезпечна точка збігається з однією з вершин умовного прямокутника, в який даний переріз вписується, і саме з тією точкою, в якій напруження, викликані дією моментів, мають один знак. Для перерізу B умова міцності матиме вигляд:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{zB}|}{W_z} + \frac{|M_{yB}|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Невідомими тут є моменти опору перерізу W_z і W_y . Тому розрахунок ведуть методом послідовних наближень. При цьому можна попередньо вибрати деякий номер швелера, визначити моменти опору складеного з цих швелерів перерізу і перевірити його на міцність. В разі значної розбіжності між діючим та допустимим напруженнями слід вибрати інший типорозмір, аж поки ця різниця не досягне мінімального значення.

Примітка: перевантаження, коли діюче напруження $|\sigma_{\max}| > [\sigma]$, допускається до 3 %.

В нашому прикладі можна скоротити цей шлях, адже в небезпечному перерізі згинальний момент в одній площині (M_y) значно перевищує згинальний момент в іншій площині (M_z). Тому можна спробувати дібрати переріз з умови міцності лише в площині дії максимального моменту, а потім перевірити його на міцність з урахуванням іншої складової моменту.

Виходячи з цих міркувань, запишемо:

$$\sigma = \frac{|M_{yB}|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Допустиме напруження для сталі 20 $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{250}{1,5} = 166 \text{ МПа}$. Отже,

$$W_y \geq \frac{|M_{yB}|}{[\sigma]} = \frac{17,5 \cdot 10^6}{166} = 105421,7 \text{ мм}^3 = 105,42 \text{ см}^3.$$

Ми знайшли необхідний момент опору складеного перерізу відносно осі y . Враховуючи, що момент опору для перерізу, що розглядається,

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{2I_{y_i}}{z_{\max}} = 2W_{y_i}, \text{ де } I_{y_i} - \text{момент інерції одного швелера відносно}$$

осі y (див. рис. 2.5), отримаємо

$$W_{y_i} = 0,5W_y \geq 0,5 \cdot 105,42 = 52,71 \text{ см}^3.$$

З таблиць сортamentів прокатної сталі вибираємо номер швелера з найближчим більшим значенням моменту опору. Це швелер № 14 з такими геометричними характеристиками: $h = 140 \text{ мм}$, $b = 58 \text{ мм}$, $z_0 = 16,7 \text{ мм}$, $W_{y_i} = 70,2 \text{ см}^3$, $I_{y_i} = 491 \text{ см}^4$, $I_{zC_i} = 45,4 \text{ см}^4$, $F = 15,6 \text{ см}^2$.

Знаходимо моменти інерції I_z і I_y та моменти опору W_z і W_y для складеного перерізу (див. рис. 2.5):

$$I_y = 2I_{yC_i} = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 2W_{y_i} = 2 \cdot 70,2 = 140,4 \text{ см}^3;$$

$$I_z = 2 \left[I_{zC_i} + (b - z_0)^2 A \right] = 2 \left[45,4 + (5,8 - 1,67)^2 \cdot 15,6 \right] = 622,98 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{622,98}{5,8} = 107,41 \text{ см}^3.$$

Перевіряємо на міцність переріз з урахуванням M_z :

$$\begin{aligned} |\sigma_{\max}| &= \frac{|M_{zB}|}{W_z} + \frac{|M_{yB}|}{W_y} = \frac{4,3 \cdot 10^6}{107,41 \cdot 10^3} + \frac{17,5 \cdot 10^6}{140,4 \cdot 10^3} = 40,03 + 124,64 = \\ &= 164,67 \text{ МПа} < 166 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Умова міцності виконується.

Отже, зупиняємось на перерізі, що складається з швелерів № 14. Проте, згідно з епюрами моментів (див. рис. 2.4), потенційно небезпечним є також переріз С. Хоч тут і діє тільки згинальний момент у площині ху, проте величина його ($M_z = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$) близька до величини максимального моменту у вибраному нами небезпечному перерізі В, в той час як момент опору перерізу у цій площині W_z менший від W_y .

Перевіримо на міцність балку в перерізі С:

$$\sigma = \frac{|M_{zC}|}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^6}{107,41 \cdot 10^3} = 139,65 \text{ МПа} < 166 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується.

7. Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі *B* і будуємо епюру сумарних напружень.

Креслимо в масштабі переріз балки (рис. 2.6).

Щоб спростити знаходження положення нейтральної лінії в перерізі та для більшої наочності, зручно спочатку показати положення силової лінії. Вона проходить через квадранти, в яких обидва моменти M_y і M_z викликають деформації волокон одного знаку: або стиск, або розтяг. Згідно з рис. 2.6 – це другий і четвертий квадранти. Кут нахилу силової лінії до осі *y* обчислимо за формулою

$$\alpha = \arctg\left(\frac{M_{yB}}{M_{zB}}\right) = \arctg\left(\frac{17,5}{4,33}\right) = 76^\circ.$$

Визначаємо положення нейтральної лінії відносно осі *z*:

$$\beta = \arctg\left(-\frac{M_{yB}}{M_{zB}} \cdot \frac{I_z}{I_y}\right) = \arctg\left(-\frac{17,5}{4,33} \cdot \frac{622,98}{982}\right) = -69^\circ.$$

Проходить нейтральна лінія відповідно через перший і третій квадранти (про це свідчить і знак "-" у формулі для кута β).

Проводимо нейтральну лінію і перпендикулярно до неї – базову лінію епюри сумарних напружень. Проводимо також базові лінії епюр розподілу напружень по сторонах перерізу. Небезпечні точки перерізу – найвіддаленіші від нейтральної лінії. Тобто це точки *D* і *E*. Тут діють максимальні напруження: стискувальні для точки *D* і розтягувальні для точки *E* (знак напружень визначаємо за напрямком дії згинальних моментів M_z і M_y).

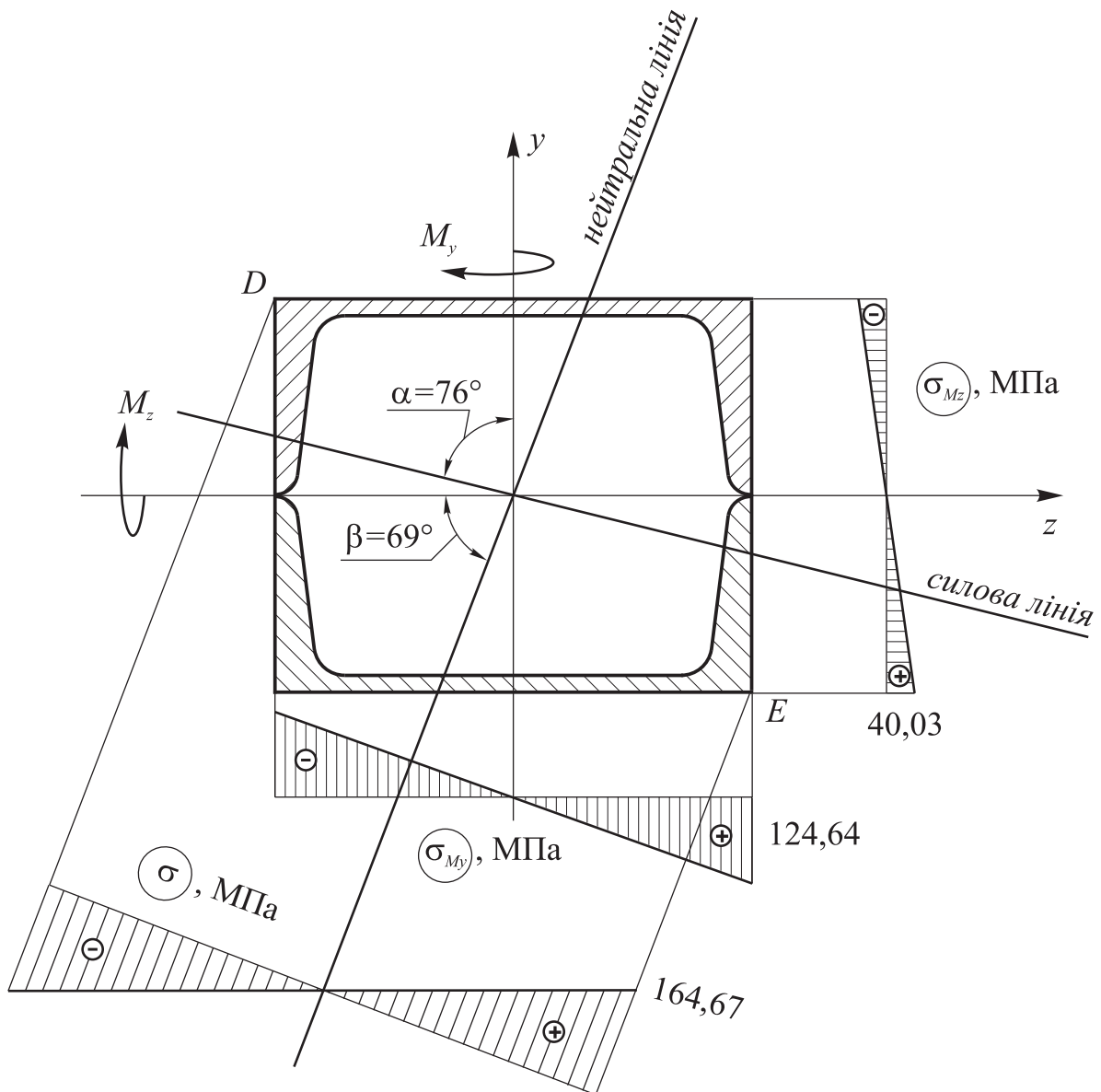


Рис. 2.6. Епюри розподілу напружень у перерізі В

Користуючись результатами розрахунків для $|\sigma_{\max}|$ (див. п. 6), запишемо:

$$|\sigma_{M_z}| = \frac{|M_{zB}|}{W_z} = 40,03 \text{ МПа}; \quad |\sigma_{M_y}| = \frac{|M_{yB}|}{W_y} = 124,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\sigma_{M_z} - \sigma_{M_y} = -\frac{M_{zB}}{W_z} - \frac{M_{yB}}{W_y} = -40,03 - 124,64 = -164,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_E = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{M_{zB}}{W_z} + \frac{M_{yB}}{W_y} = 40,03 + 124,64 = 164,67 \text{ МПа}.$$

За отриманими даними будуюмо епюри напружень (див. рис. 2.6).

8. Визначаємо прогини балки в перерізі A у головних площинах xy та xz та величину повного прогину, користуючись методом Мора.

Прогин у площині xy позначимо w_{Ay} , а у площині xz – w_{Az} .

Для визначення прогину у площині xy до балки в перерізі A прикладаємо одиничну силу $\bar{P}_y = 1$ (рис. 3.7, a) та записуємо вирази для згинальних моментів на кожній ділянці стержня (точки відліку положень довільного перерізу x на кожній ділянці узгоджуємо з вибраними в п. 3 при визначенні згинальних моментів від заданого навантаження).

У площині xy :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad \bar{M}_z(x) = -1 \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad \bar{M}_z(x) = -1 \cdot x.$$

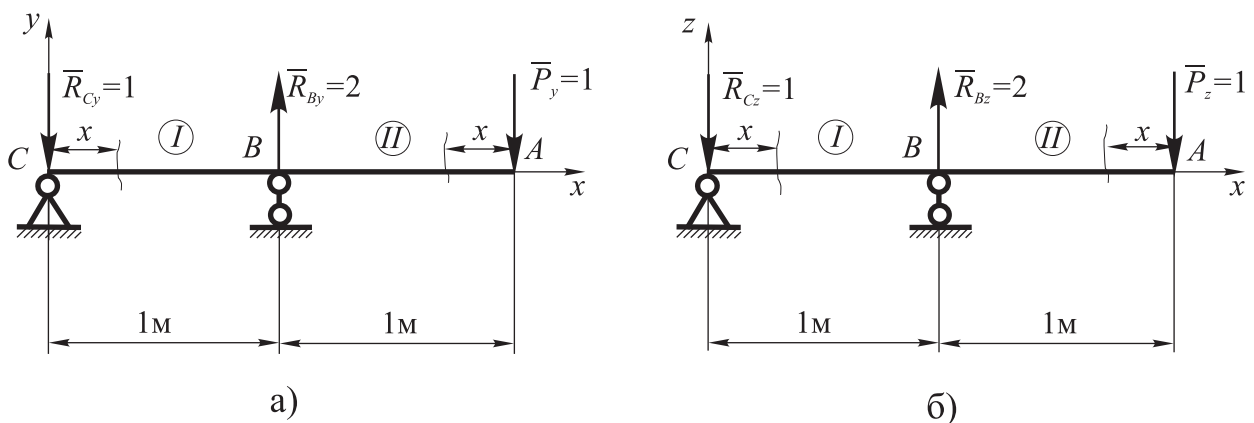


Рис. 2.7. Схеми прикладання до балки одиничних навантажень при визначенні прогинів у перерізі A

Користуючись виразами для згинальних моментів від заданого навантаження, отриманими в п. 3, та одиничного навантаження, запишемо інтеграл Мора у вигляді:

$$\begin{aligned}
w_{Ay} &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{z_i}(x) \bar{M}_{z_i}(x)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^1 (-M + R_{Cy}x)(-1 \cdot x) dx + \int_0^1 \frac{q_y x^2}{2} (-1 \cdot x) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left[\int_0^{10^3} (-15 \cdot 10^6 + 19,33 \cdot 10^3 x)(-x) dx + \int_0^{10^3} \frac{8,66 x^2}{2} (-x) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left[\int_0^{10^3} (15 \cdot 10^6 x - 19,33 \cdot 10^3 x^2) dx - \int_0^{10^3} \frac{8,66 x^3}{2} dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left(15 \cdot 10^6 \frac{x^2}{2} - 19,33 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} - \frac{8,66 x^4}{8} \right) \bigg|_0^{10^3} = \\
&= \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left(\frac{15}{2} - \frac{19,33}{3} - \frac{8,66}{8} \right) = -0,016 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

Отже, величина прогину у площині $xу$ складає $|w_{Ay}| = 0,016 \text{ мм}$. Знак „-” означає, що прогин спрямований у бік, протилежний до напрямку одиничної сили $\bar{P}_y$ (див. рис. 2.7, а).

Для визначення прогину у площині xz прикладаємо в перерізі A одиничну силу $\bar{P}_z$ (рис. 2.7, б) і проводимо всі необхідні обчислення у послідовності, як і для площини $xу$.

Вирази для згинальних моментів від одиничного навантаження:

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad \bar{M}_y(x) = -1 \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad \bar{M}_y(x) = -1 \cdot x.$$

Інтеграл Мора:

$$\begin{aligned}
w_{Az} &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{y_i}(x) \bar{M}_{y_i}(x)}{EI_z} dx = \\
&= \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^1 (-R_{Cz} \cdot x)(-1 \cdot x) dx + \int_0^1 \left(\frac{q_z x^2}{2} - P \cdot x \right) (-1 \cdot x) dx \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left[\int_0^{10^3} (17,5 \cdot 10^3 x^2) dx + \int_0^{10^3} \left(-\frac{5x^3}{2} + 20 \cdot 10^3 x^2 \right) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left(17,5 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{8} + 20 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{10^3} = \\
&= \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left(\frac{17,5}{3} - \frac{5}{8} + \frac{20}{3} \right) = 6,046 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

Сумарний прогин знаходимо як геометричну суму знайдених прогинів:

$$w_A = \sqrt{w_{Ay}^2 + w_{Az}^2} = \sqrt{0,016^2 + 6,046^2} \approx 6,05 \text{ мм.}$$

Щоб визначити напрямок прогину, треба побудувати векторну діаграму переміщень центру ваги перерізу A , зобразивши в масштабі вектори переміщень $\vec{w}_{Ay}$ і $\vec{w}_{Az}$.

Слід зазначити, що в нашому випадку напрямок сумарного прогину практично збігається з напрямком прогину в площині xz , оскільки $w_{Ay} \ll w_{Az}$. Однак, з метою показати методику таких обчислень повністю, зобразимо векторну діаграму переміщень без дотримання масштабів, вказавши лише реальні напрямки знайдених прогинів (рис. 2.8).

Кут між напрямком сумарного прогину та віссю z знайдемо зі співвідношення:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{w_y}{w_z}\right) = \arctg\left(\frac{0,016}{6,05}\right) = \arctg 0,0026446 = 0,15^\circ.$$

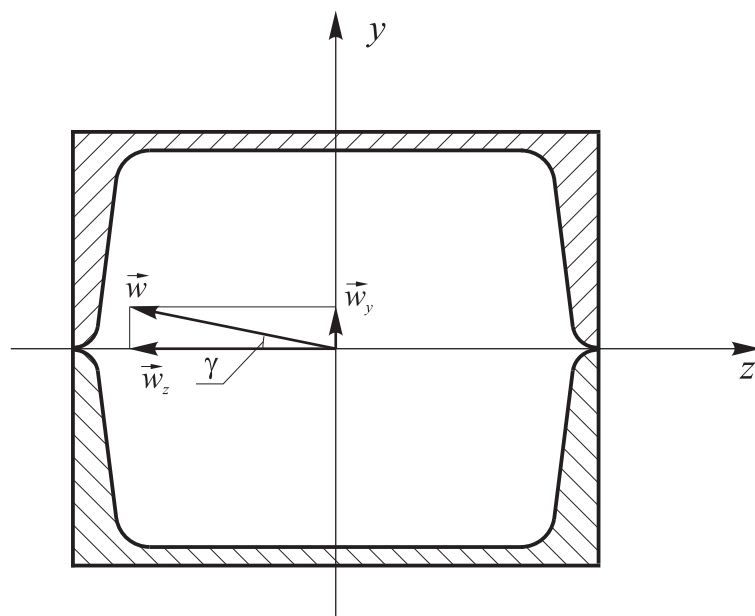


Рис. 2.8. Векторна діаграма переміщень перерізу A

Контрольні запитання

1. Коли виникає складний згин?
2. Як визначаються нормальні напруження в перерізі при складному згині та як записується рівняння нейтральної лінії?
3. Які поперечні перерізи та точки є небезпечними при складному згині та як записується умова міцності?
4. Як визначаються переміщення поперечних перерізів та як записується умова жорсткості при складному згині?
5. Як підібрати балку при складному згині?

ЗАДАЧА 3

ПОЦЕНТРОВИЙ СТИСК

Бетонна колона стискається силою P , що діє паралельно осі колони, але не збігається з віссю (рис. 3.1). Для заданого перерізу колони (табл. 3.1, рис. 3.2) визначити допустиме значення сили P і побудувати епюру розподілення напружень в перерізі, якщо відома точка прикладання сили P в системі координат z' , y' і допустимі значення напружень на розтяг $[\sigma]_p = 2$ МПа і на стиск $[\sigma]_c = 20$ МПа.

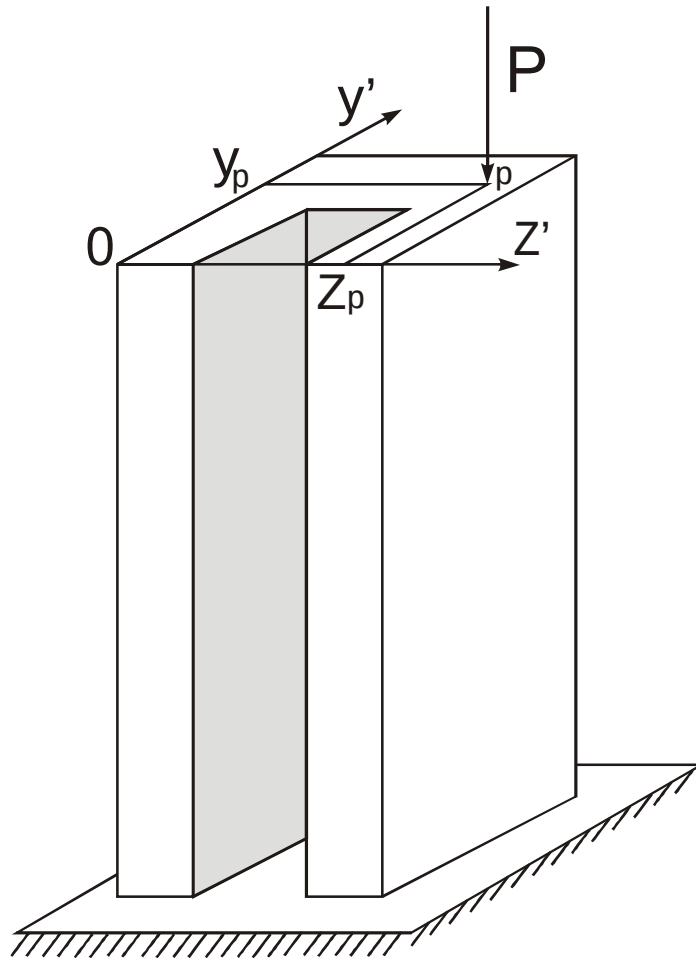


Рис. 3.1. Приклад поцацентрового стиску колони

Таблиця 3.1. Варіанти завдань до задачі 3

Пара-метр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , см	70	65	50	45	40	45	50	55	60	65
z_P , см	40	30	20	15	10	15	25	35	40	15
y_P , см	30	10	25	20	15	20	25	20	25	30

План розв'язування задачі

1. Визначити положення центра ваги перерізу в системі координат y' , z' .
2. Провести головні центральні осі інерції y , z і визначити в цій системі координати точки прикладання сили (полюса) y_P , z_P .
3. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу I_y , I_z і радіуси інерції i_y , i_z .
4. Знайти відрізки y_H , z_H , що відсікаються нейтральною лінією на осях y , z , провести нейтральну лінію і визначити координати небезпечних (найбільш віддалених від нейтральної лінії) точок.
5. Обчислити допустиме значення сили P з умов міцності в небезпечних точках перерізу.
6. Побудувати епюру розподілення нормальних напружень в перерізі.

Розв'язання задачі

До колони з перерізом, який показано на рис. 3.3, прикладена сила P в точці з координатами $y'_P = 5$ см, $z'_P = 10$ см. Визначити допустиму силу P й побудувати епюру розподілення напружень в перерізі.

1. Визначаємо координати центра ваги C перерізу.

Розглядаючи переріз складеним з двох частин – прямокутника 80×40 см з центром ваги C_1 і вирізу 56×28 см з центром ваги C_2 , знайдемо координату y'_C центра ваги перерізу:

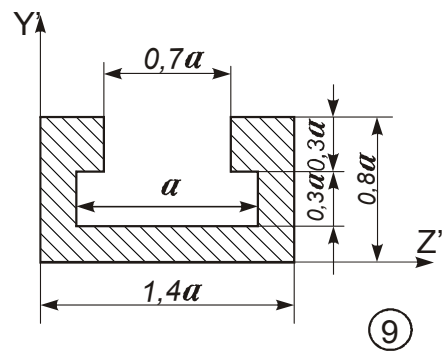
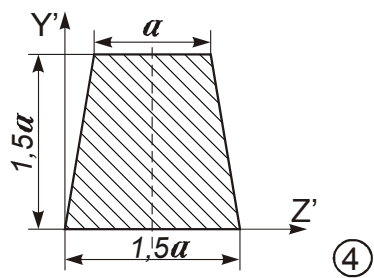
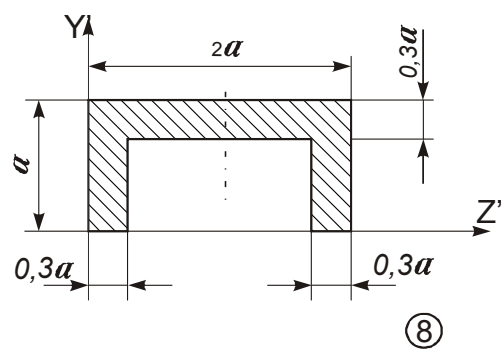
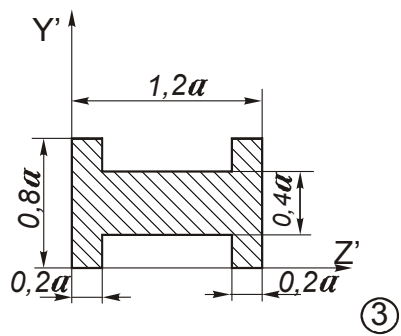
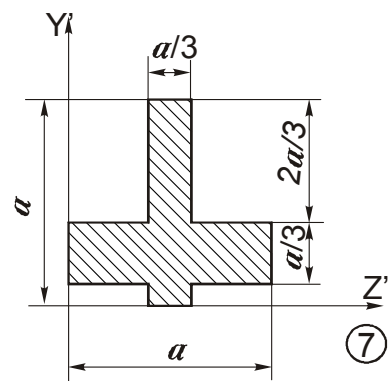
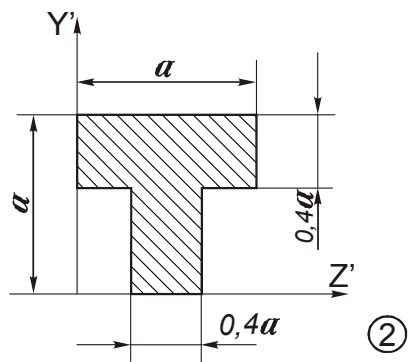
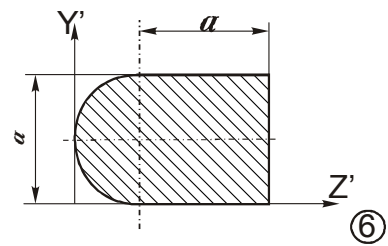
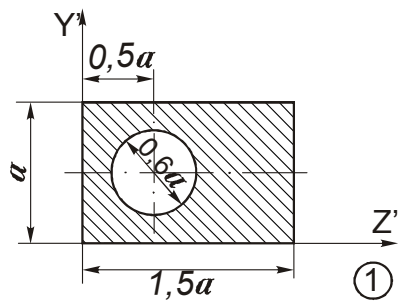
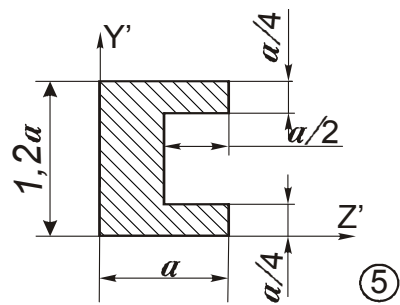
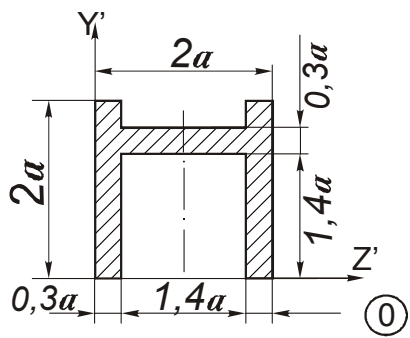


Рис. 3.2. Варіанти поперечних перерізів до задачі 3

$$y'_C = \frac{\sum y'_{Ci} F_i}{\sum F_i} = \frac{y'_{C1} F_1 - y'_{C2} F_2}{F_1 - F_2} = \frac{20 \cdot 80 \cdot 40 - 26 \cdot 56 \cdot 28}{80 \cdot 40 - 56 \cdot 28} = 14,8 \text{ см.}$$

Оскільки переріз симетричний, то $z'_C = 40 \text{ см.}$

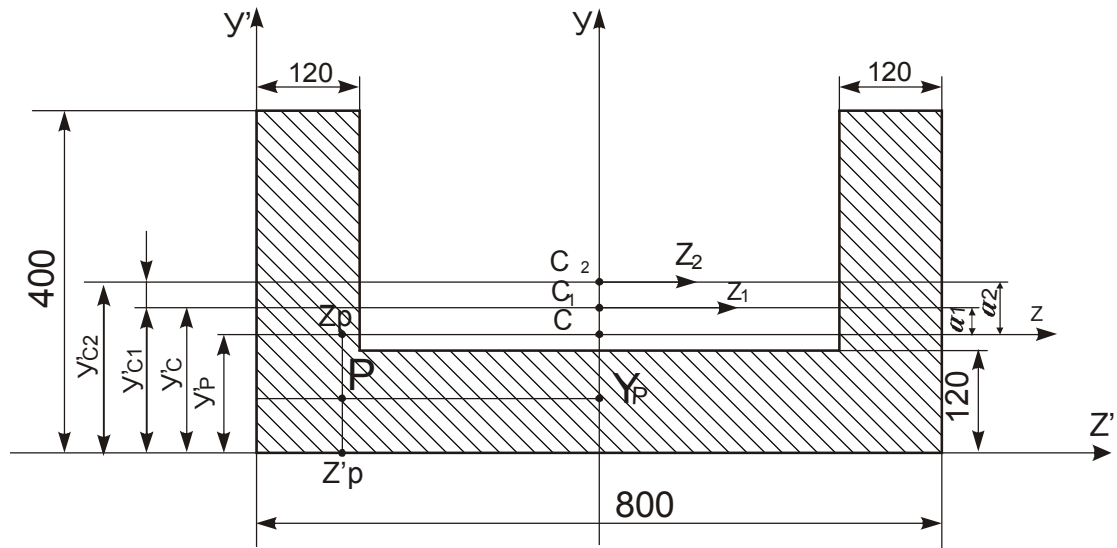


Рис. 3.3. Поперечний переріз колони

2. Через центр ваги перерізу C проводимо головні центральні осі інерції перерізу – y, z .

В цій системі координат точка прикладення сили (поліус) має координати $y_P = -9,3 \text{ см}$, $z_P = -30 \text{ см}$.

3. Визначаємо головні центральні моменти інерції і радіуси інерції перерізу.

Моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$I_y = I_y^I - I_y^{II} = \frac{40 \cdot 80^3}{12} - \frac{28 \cdot 56^3}{12} = 1648128 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_z &= I_z^I - I_z^{II} = (I_{z1} + a_1^2 F_1) - (I_{z2} + a_2^2 F_2) = \\ &= \left(\frac{80 \cdot 40^3}{12} + 5,7^2 \cdot 80 \cdot 40 \right) - \left(\frac{56 \cdot 28^3}{12} + 11,7^2 \cdot 56 \cdot 28 \right) = 123474,6 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Радіуси інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{1648128}{1632} = 1020 \text{ см}^2;$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{213474,6}{1632} = 130,8 \text{ см}^2.$$

4. Визначаємо положення нейтральної лінії і координати небезпечних точок.

Відрізки y_H і z_H , які відсікає нейтральна лінія на головних центральних осях, знайдемо за формулами:

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{130,8}{-9,3} = 14 \text{ см};$$

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{1020}{-30} = 34 \text{ см}$$

Нейтральна лінія займає положення, яке показане на рис. 3.4. Небезпечними будуть точки A і B , що найбільш віддалені від нейтральної лінії. При цьому в точці A діють максимальні стискувальні, а в точці B – максимальні розтягуювальні напруження.

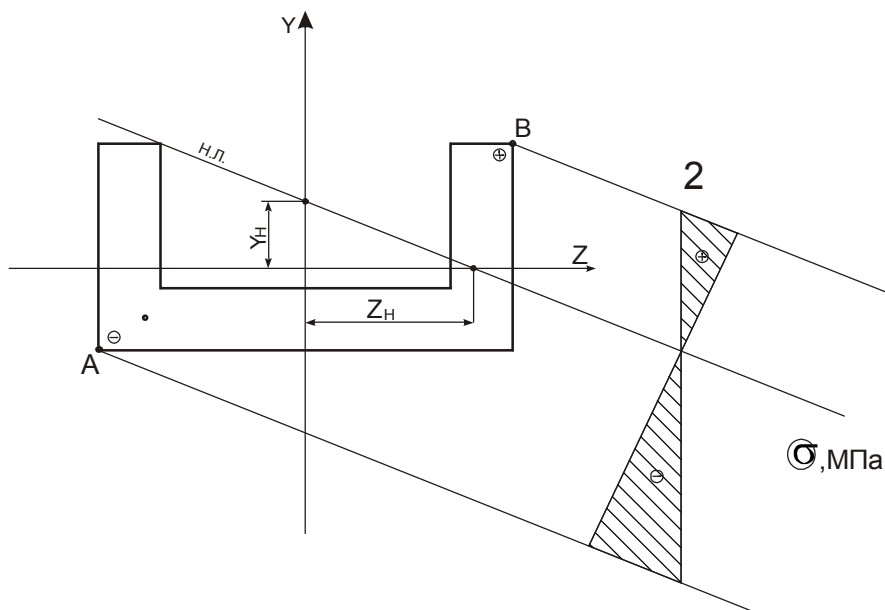


Рис. 3.4. Положення нейтральної лінії і епюра напружень

Координати небезпечних точок:

$$y_A = -14,3 \text{ см}, \quad z_A = -40 \text{ см};$$

$$y_B = 25,7 \text{ см}, \quad z_B = 40 \text{ см}.$$

5. Визначаємо допустиме значення сили P .

Запишемо умови міцності для кожної з небезпечних точок і визначимо допустимі значення сили $[P_-]$ і $[P_+]$, які будуть задовольняти умови міцності за стискувальними (т. A) і розтягувальними (т. B) напруженнями.

Для точки A , враховуючи, що $P < 0$, маємо:

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_A| = \left| -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_A + \frac{y_P}{i_z^2} y_A \right) \right| \leq [\sigma_-],$$

звідси

$$[P_-] = \frac{[\sigma_-] F}{1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2}} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 1632 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(-30)(-40)}{1020} + \frac{(-9,3)(-14,3)}{130,8}} = 1029653 \text{ Н} =$$

$$= 1029,653 \text{ кН}.$$

Для точки B :

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_B + \frac{y_P}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_+],$$

Звідси

$$[P_+] = -\frac{[\sigma_+] F}{1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2}} = -\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1632 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(-30) \cdot 40}{1020} + \frac{(-9,3) \cdot 25,7}{130,8}} = 163200 \text{ Н} =$$

$$= 163,2 \text{ кН}.$$

З двох значень $[P_+]$ і $[P_-]$ вибираємо менше $[P_-] = 163,2 \text{ кН}$. У цьому випадку будуть задовольнятися умови міцності і в т. A , і в т. B .

6. Оскільки допустиме значення сили ми визначили з умови міцності в т. B , то під час дії цієї сили напруження в т. B будуть дорівнювати допус-

тимим – 2 МПа . Знаючи, що на нейтральній лінії $\sigma = 0$, можна легко побудувати лінійну епюру розподілення нормальних напружень в перерізі (див. рис. 3.4).

Контрольні запитання

1. Коли виникають задачі про складний опір?
2. Які внутрішні силові фактори (зусилля) виникають в поперечному перерізі бруса в загальному випадку?
3. Які деформації називають простими, а які складними?
4. У якій послідовності виконується розв'язання задач про складний опір?
5. Що називається позацентровим стисненням (розтягненням)?
6. Які прості деформації можна виділити в загальному випадку позацентрового стиснення (розтягнення)?
7. Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі при позацентровому стисненні (розтягненні)?
8. Від чого залежить положення нейтральної лінії при позацентровому стисненні (розтягненні)?
9. Як визначити положення нейтральної лінії при позацентровому стисненні (розтягненні)?
10. Які точки поперечного перерізу є небезпечними при осьовому стисненні (розтягненні)?
11. Які точки поперечного перерізу є небезпечними при позацентровому стисненні (розтягненні)?
12. Що називається ядром перерізу та які властивості воно має?
13. Для чого потрібно знати ядро перерізу?
14. Чи може ядро перерізу виходити за контур перерізу?

ЗАДАЧА 4

РОЗРАХУНОК КРУГЛОГО ВАЛА НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

Сталевий вал зі шківом пасової передачі 3 та двома зубчастими колесами 1, 2 (рис. 4.1, табл. 4.1) рівномірно обертається з швидкістю ω і передає потужність, задану на зубчастих колесах або на шківі і одному з коліс.

Визначити діаметр вала, нехтуючи його власною вагою і вагою коліс та шківів. Кут зачеплення $\alpha = 20^\circ$, $a = 1$ м, діаметр початкового колеса 1 $d_1 = 0,5$ м, діаметр шківів $d_3 = 0,25$ м. Взяти коефіцієнт запасу $n_T = 1,5$.

Таблиця 4.1. Варіанти завдань до задачі 4

Варіант	α_1	α_2	α_3	ω, C^{-1}	$N_1, \text{кВт}$	$N_2, \text{кВт}$	$N_3, \text{кВт}$	$\frac{d_2}{d_1}$	Матеріал
0	0	$3\pi/2$	π	10	—	40	20	0,5	Сталь 60
1	$\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/6$	15	60	—	30	0,4	Сталь 55
2	$\pi/3$	$7\pi/6$	$2\pi/3$	20	50	20	—	0,6	Сталь 50
3	$\pi/2$	π	$\pi/2$	30	—	30	40	0,5	Сталь 45
4	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$\pi/3$	40	60	—	35	0,4	Сталь 40
5	$5\pi/6$	$2\pi/3$	0	50	30	10	—	0,3	Сталь 35
6	π	$\pi/3$	$\pi/6$	60	—	50	40	0,6	Сталь 30
7	$7\pi/6$	$\pi/2$	$3\pi/2$	70	50	—	30	0,5	Сталь 25
8	$4\pi/3$	$\pi/6$	$4\pi/3$	80	50	20	—	0,4	Сталь 20
9	$3\pi/2$	0	$7\pi/6$	90	—	60	30	0,3	Сталь 10

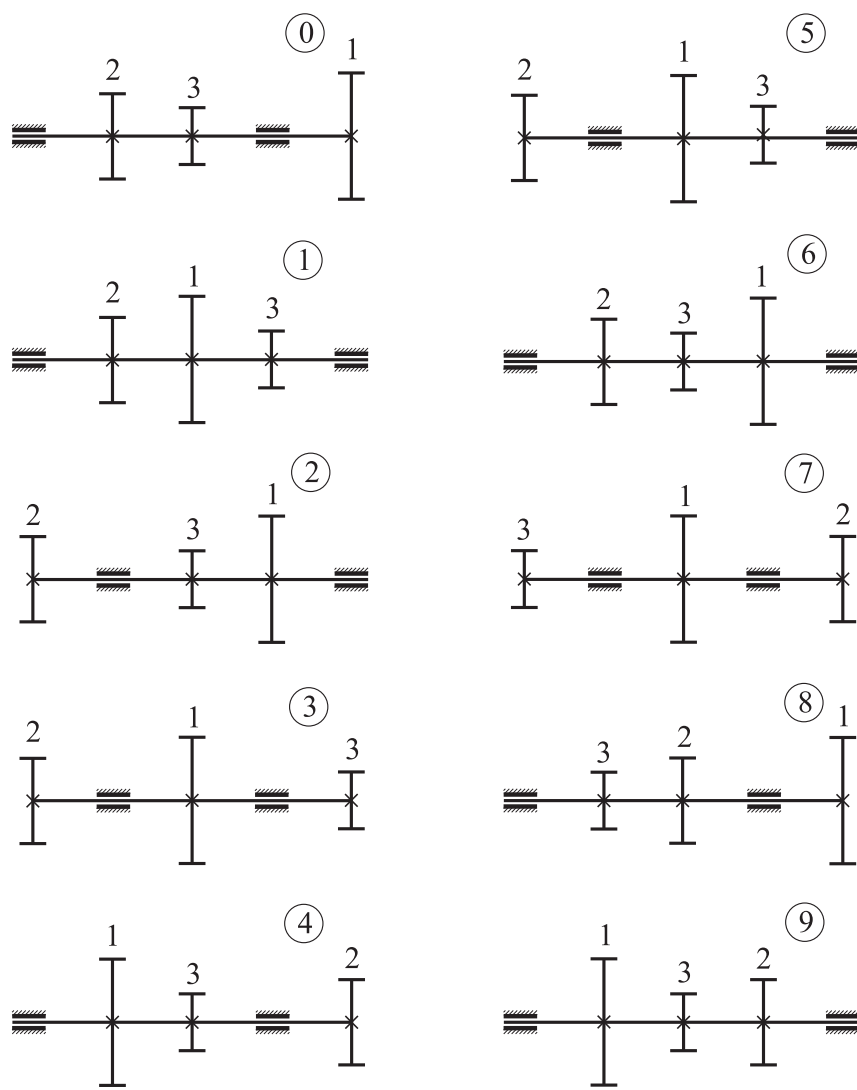
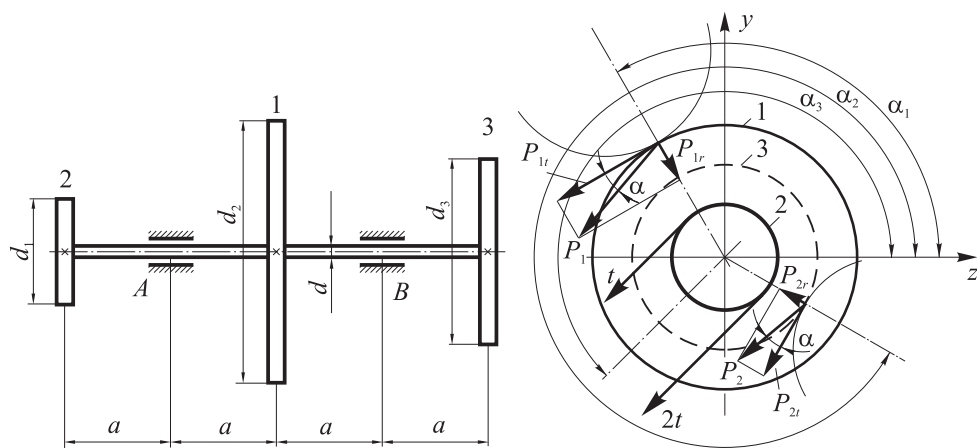


Рис.4.1. Варіанти схем валів до задачі 4

План розв'язування задачі

1. Визначити на шківі або колесі потужність, де її не задано, з умови рівномірного обертання вала, нехтуючи тертям у підшипниках.
2. Обчислити зовнішні моменти M_k на кожному колесі та шківі, приклавши їх у відповідному напрямку.
3. Визначити сили в передачах.
4. Зобразити в аксонометрії схему навантаження вала, звівши сили до центрів ваги перерізів і розклавши їх на горизонтальні та вертикальні складові.
5. Побудувати епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах.
6. Визначити небезпечний переріз.
7. Обчислити діаметр вала за одним з критеріїв міцності, округливши його величину до найближчого більшого значення згідно з рекомендованим рядом лінійних розмірів R 40 (див. додаток).

Розв'язання задачі

Дано (рис. 5.2):
 $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$, $N_1 = 50 \text{ кВт}$, $N_2 = 30 \text{ кВт}$, $d_1 = 0,5 \text{ м}$,
 $d_2 = 0,15 \text{ м}$, $d_3 = 0,25 \text{ м}$, $a = 1 \text{ м}$ $\alpha = 20^\circ$, $\alpha_1 = \frac{5}{3}\pi = 300^\circ$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$,
 $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi = 270^\circ$, матеріал – сталь 20 з границею текучості $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$,
коефіцієнт запасу міцності $n_T = 1,5$.

1. Визначимо потужність N_2 на колесі 2 (за умовою задачі потужності N_1 на колесі 1 і N_3 на шківі 3 задані). Для цього скористаємось умовою рівномірного обертання вала. Орієнтуючись на напрямок дії моментів від заданого навантаження (див. рис. 4.2), запишемо:

$$N_1 = N_2 + N_3.$$

Звідси $N_2 = N_1 - N_3 = 50 - 30 = 20$ кВт.

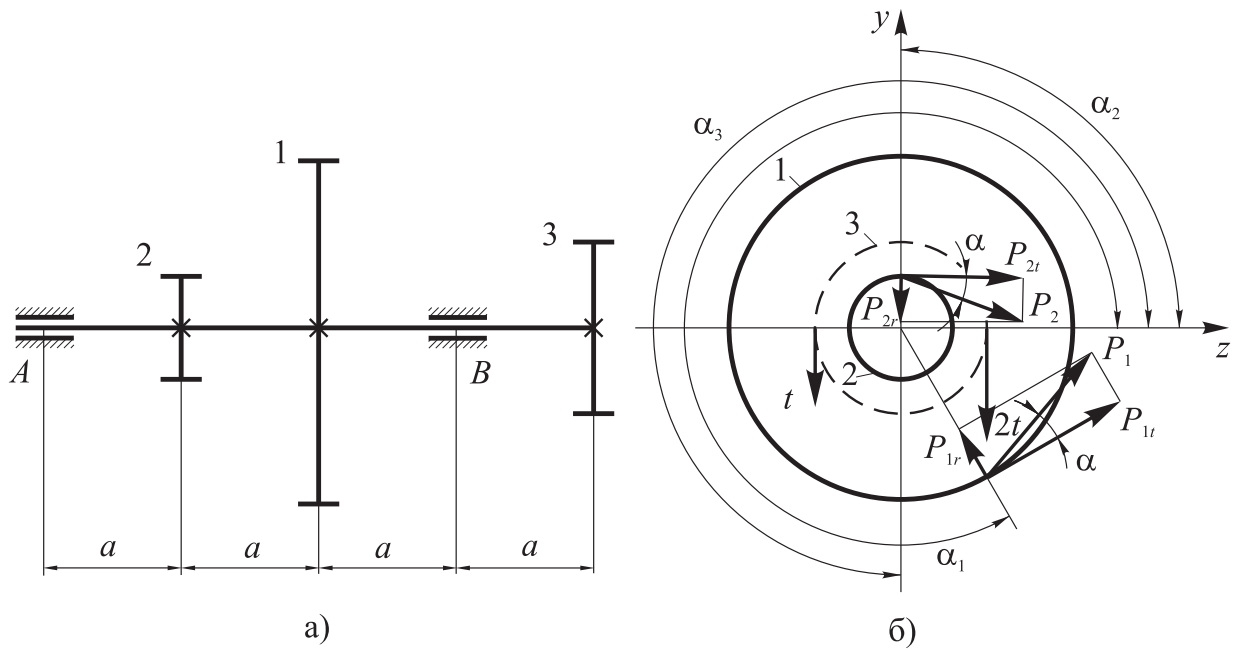


Рис. 4.2. Схема навантаження вала

2. За обертального руху обертальний момент пов'язаний з потужністю співвідношенням:

$$T = \frac{N}{\omega}.$$

Таким чином, до коліс 1, 2 і шківів 3 прикладені моменти:

$$T_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{50}{50} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{30}{50} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Ці моменти створюються відповідними силами в передачах:

$$P_1 = \frac{2T_1}{d_1 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1}{0,5 \cdot \cos 20^\circ} \approx 4,3 \text{ кН};$$

$$P_2 = \frac{2T_2}{d_2 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,15 \cdot \cos 20^\circ} \approx 5,7 \text{ кН};$$

$$P_3 = 3t = 3 \frac{2T_3}{d_3} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,6}{0,25} \approx 14,4 \text{ кН}.$$

4. Будуємо в аксонометрії розрахункову схему вала, звівши сили до центрів ваги перерізів і розклавши їх на горизонтальні і вертикальні складові (рис. 4.3).

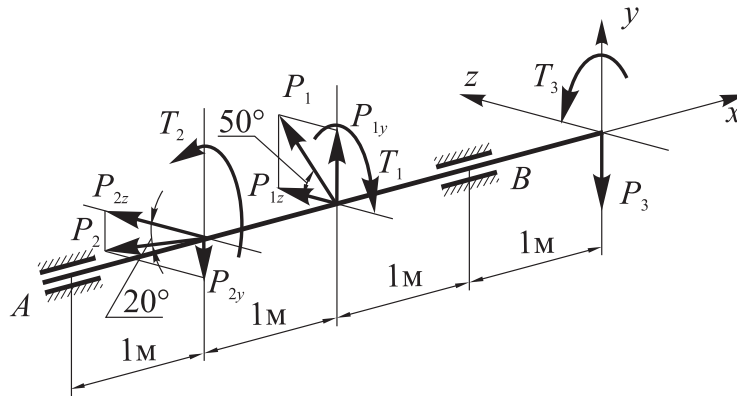


Рис. 4.3. Розрахункова схема вала

Визначаємо компоненти навантажень, вказані на рис. 4.3:

$$P_{1y} = P_1 \sin 50^\circ = 4,3 \cdot 0,766 = 3,3 \text{ кН};$$

$$P_{1z} = P_1 \cos 50^\circ = 4,3 \cdot 0,643 = 2,8 \text{ кН};$$

$$P_{2y} = P_2 \sin 20^\circ = 5,7 \cdot 0,342 = 1,9 \text{ кН};$$

$$P_{2z} = P_2 \cos 20^\circ = 5,7 \cdot 0,94 = 5,4 \text{ кН}.$$

5. Будуємо епюри крутних та згинальних моментів у вертикальній та горизонтальній площинах.

Визначаємо опорні реакції в кожній площині з умов рівноваги балки (розрахункові схеми подані на рис. 4.4).

У вертикальній площині xy :

$$\sum M_{zA} = R_{By} \cdot 3 - P_{2y} \cdot 1 + P_{1y} \cdot 2 - P_3 \cdot 4 = R_{By} \cdot 3 - 1,9 \cdot 1 + 3,3 \cdot 2 - 14,4 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_{zB} = R_{Ay} \cdot 3 + P_{2y} \cdot 2 - P_{1y} \cdot 1 - P_3 \cdot 1 = R_{Ay} \cdot 3 + 1,9 \cdot 2 - 3,3 \cdot 1 - 14,4 = 0.$$

Звідси $R_{Ay} = 4,6$ кН, $R_{By} = 17,6$ кН.

У горизонтальній площині xz :

$$\sum M_{yA} = R_{Bz} \cdot 3 - P_{2z} \cdot 1 - P_{1z} \cdot 2 = R_{Bz} \cdot 3 - 5,4 \cdot 1 - 2,8 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_{yB} = R_{Az} \cdot 3 - P_{2z} \cdot 2 - P_{1z} \cdot 1 = R_{Az} \cdot 3 - 5,4 \cdot 2 - 2,8 \cdot 1 = 0.$$

Звідси $R_{Az} = 4,5$ кН, $R_{Bz} = 3,7$ кН.

Побудувавши епюри крутних моментів та згинальних моментів M_z і M_y у вертикальній і горизонтальній площинах відповідно (див. рис. 4.4), визначаємо небезпечний переріз. Для цього зручно спочатку побудувати епюру сумарного згинального моменту M_c . Ординати цієї епюри в характерних точках знаходимо за формулою:

$$M_c = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

У перерізі 2:

$$M_{c2} = \sqrt{4,6^2 + 4,5^2} = \sqrt{21,16 + 20,25} = 6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі I:

$$M_{cI} = \sqrt{11,1^2 + 3,7^2} = \sqrt{123,21 + 13,69} = 11,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі B:

$$M_{cB} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

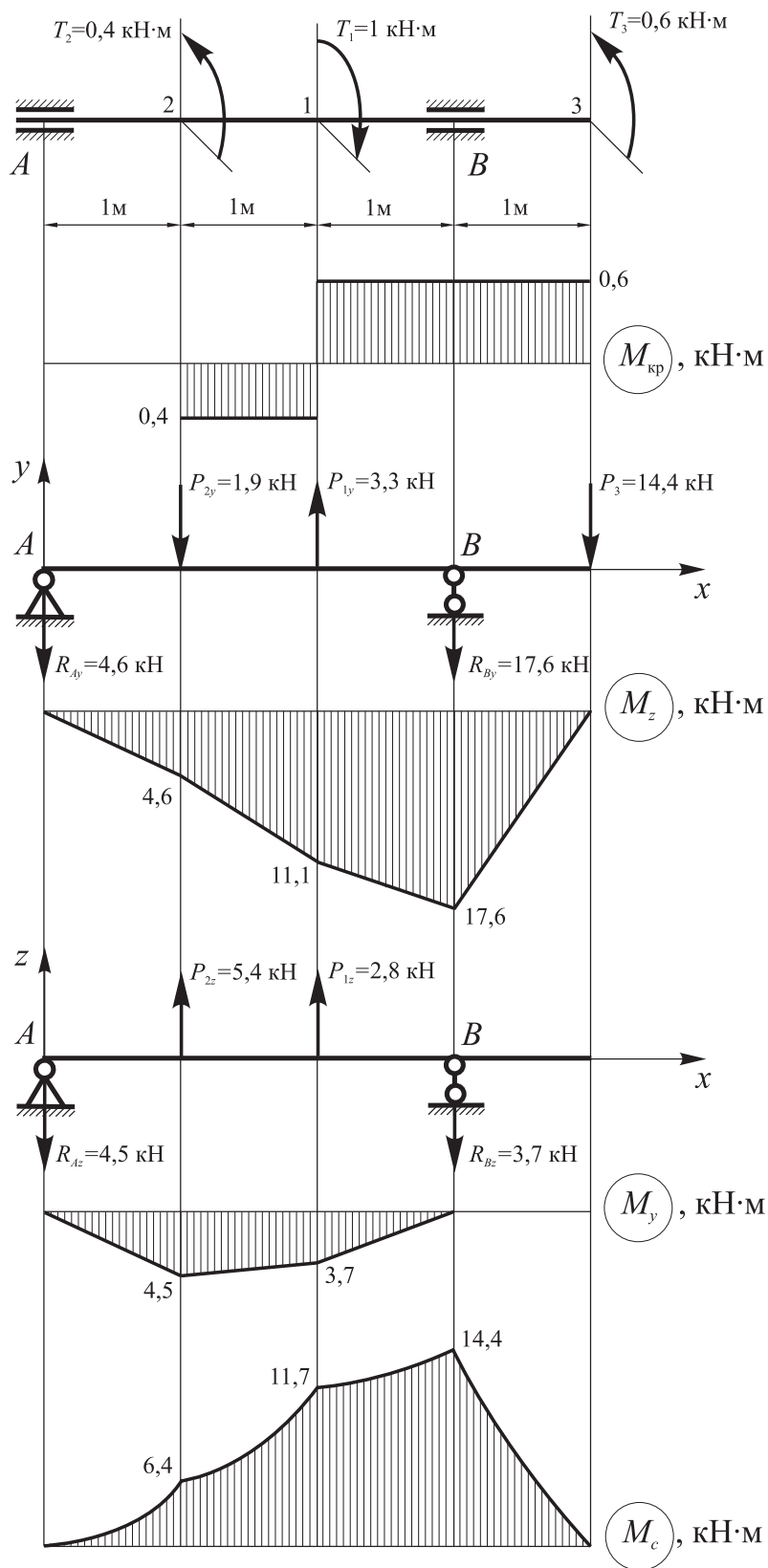


Рис. 4.4. Епюри крутного та згинальних моментів

Проаналізувавши епюри крутного та сумарного згинального моментів, приходимо до висновку, що небезпечним є переріз B . Тут діє максимальний крутний момент ($M_{\text{кр}} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$) та сумарний згинальний момент ($M_{\text{с}} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

6. Для визначення необхідного діаметра вала скористаємось третьою теорією міцності. Записуємо умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{с}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W} = \frac{M_{\text{зв max}}}{W} \leq [\sigma].$$

Враховуючи, що осьовий момент опору круглого перерізу $W = \frac{\pi d^3}{32}$, знаходимо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{зв max}}}{\pi [\sigma]}}.$$

Тут $M_{\text{зв max}} = \sqrt{14,4^2 + 0,6^2} = \sqrt{207,36 + 0,36} = 14,41 \text{ кН} \cdot \text{м}$, допустиме напруження для сталі 20 $[\sigma] = \sigma_{\text{т}} / n_{\text{т}} = 250 / 1,5 = 167 \text{ МПа}$. Отже,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,41 \cdot 10^6}{\pi \cdot 167}} = 95,8 \text{ мм}.$$

Згідно з рекомендованим рядом лінійних розмірів $R 40$ (див. додаток) остаточно приймаємо $d = 96 \text{ мм}$.

Контрольні запитання

1. Які напруження виникають в поперечному перерізі при згині з крученням?
2. Які поперечні перерізи є небезпечними при згині з крученням?
3. Які точки кругового поперечного перерізу є небезпечними при згині з крученням?
4. Як визначається зведений момент за четвертою теорією міцності при згині з крученням?
5. Як записується умова міцності для круглих стержнів при згині з крученням?

ЗАДАЧА 5

ПРОЕКТУВАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

Для заданого стояка (рис. 5.1, табл. 5.1), що стиснений осьовою силою P , підібрати переріз (рис. 5.2, 5.3), попередньо раціонально його розташували. Конструкцію опор стояка показано у двох проекціях. Складений переріз працює як одне ціле. Матеріал – сталь Ст3, допустиме напруження на стиск $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Таблиця 5.1. Варіанти завдань до задачі 5

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P , кН	260	280	400	240	380	320	370	400	360	300
l , м	4,5	4,5	4	3	3,5	2,5	3	2,5	4	3,5

План розв'язування задачі

Задача розв'язується методом послідовних наближень з використанням таблиці коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження.

1. Проаналізувавши умови закріплення кінців стояка у двох площинах, побудувати розрахункову схему.

2. Приймаючи значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$, визначити площу поперечного перерізу і з урахуванням форми перерізу обчислити радіуси інерції i_y, i_z .

3. Для забезпечення максимальної жорсткості стержня в цілому переріз розташувати так, щоб вісь координат, відносно якої переріз має більший радіус інерції, була перпендикулярна до площини, в якій коефіцієнт зведення довжини μ має більше значення. Обчислити гнучкості стержня у двох площинах. Подальший розрахунок вести для площини найбільшої гнучкості.

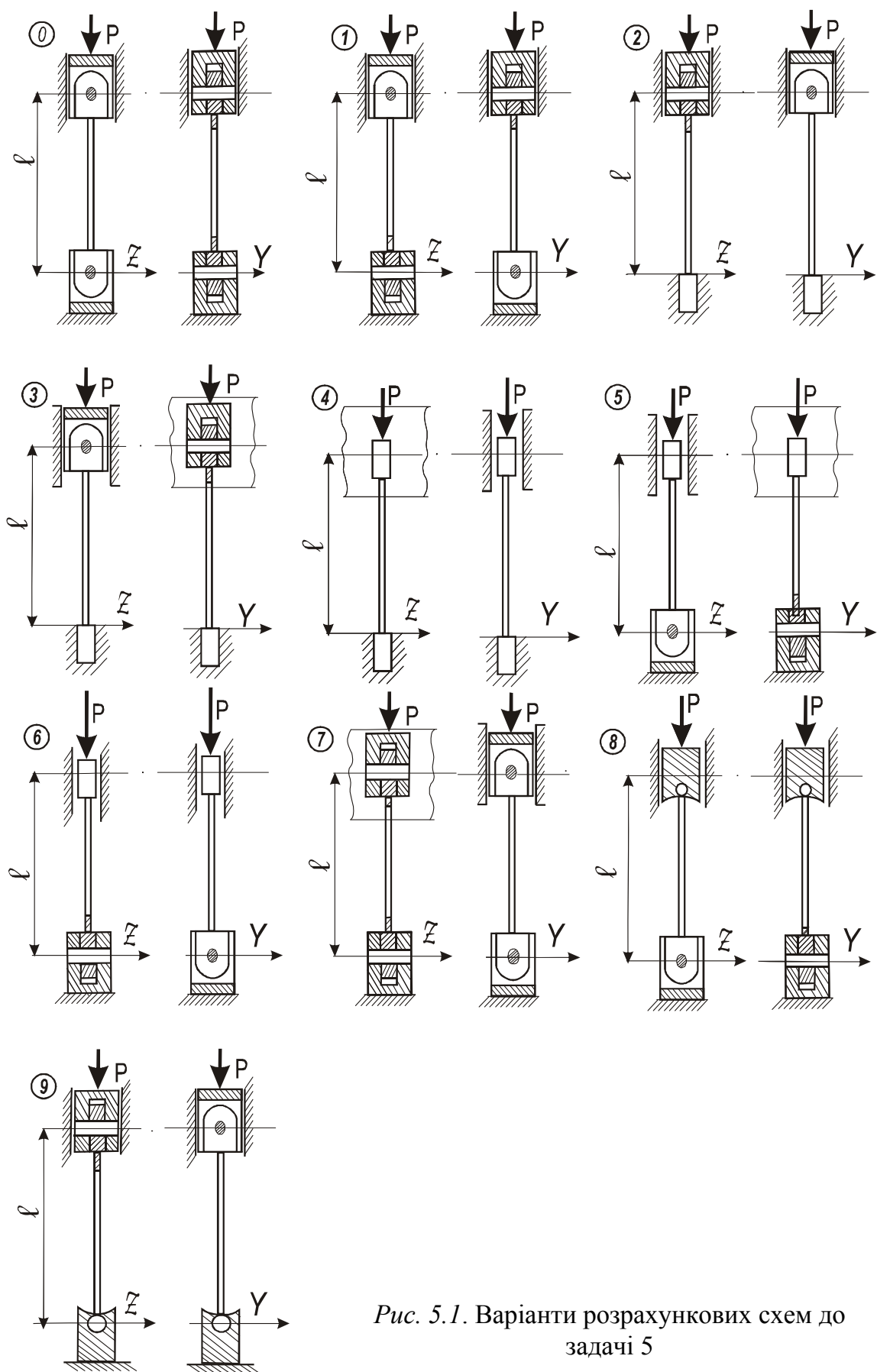


Рис. 5.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 5

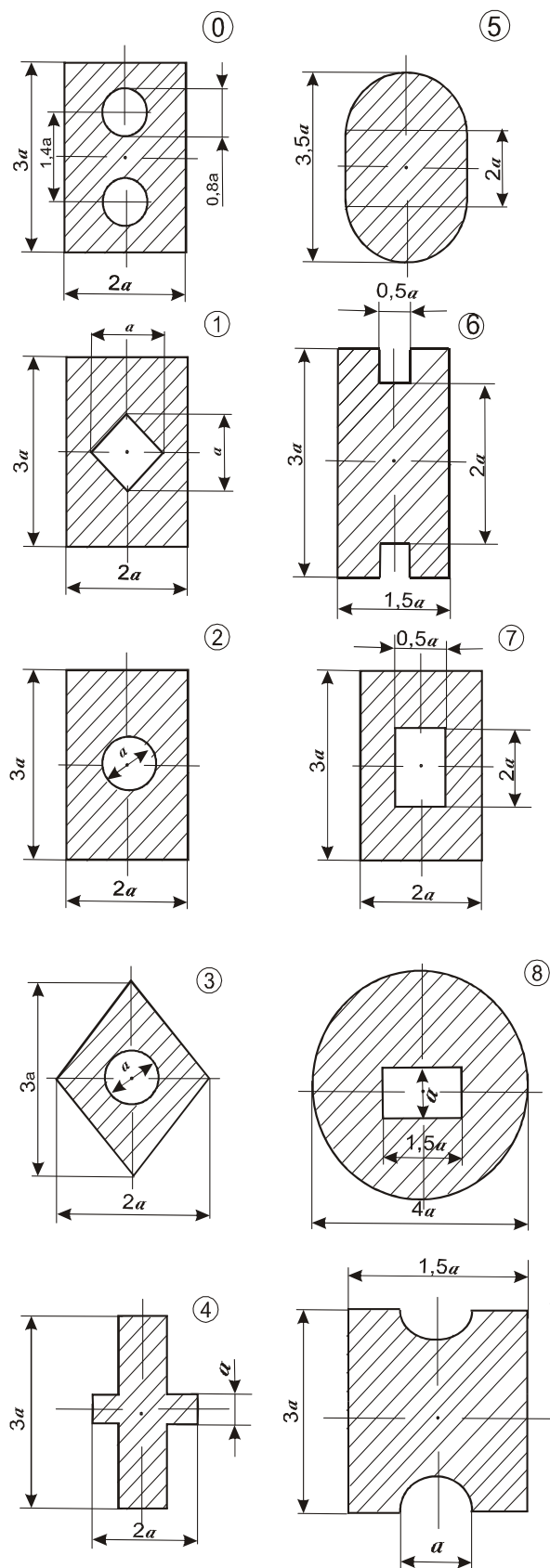


Рис. 5.2. Варіанти суцільних поперечних перерізів стиснутих стержнів (вар. А)

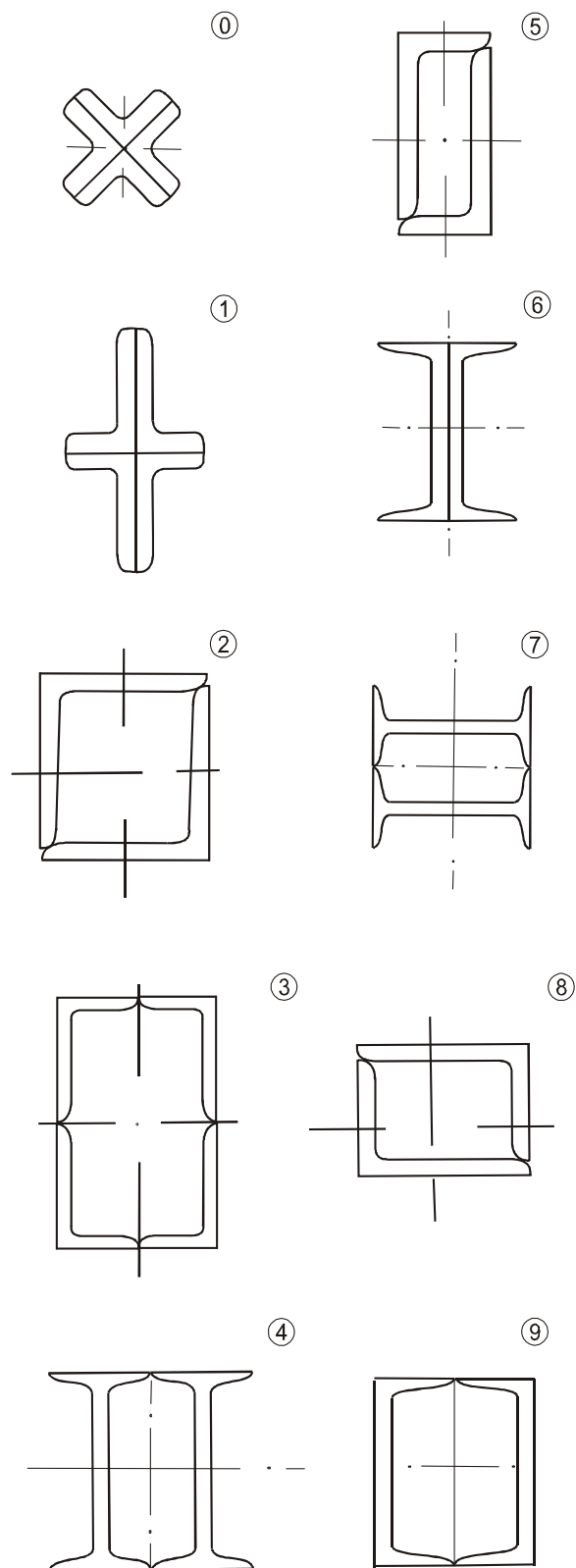


Рис. 5.3. Варіанти складених поперечних перерізів стиснутих стержнів (вар. Б)

4. За обчисленим значенням максимальної гнучкості знайти, використовуючи табличні дані, коефіцієнт φ_1 (за необхідністю – методом інтерполяції). Якщо різниця між заданим і знайденим значеннями коефіцієнта перевищує 5 %, розрахунки повторити, задаючись новим значенням коефіцієнта φ_2 , що дорівнює середньому арифметичному двох попередніх, і т. д.

5. Для остаточного значення площі перерізу обчислити напруження в стержні і порівняти з допустимими напруженнями на стійкість $[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma]$.

Розв'язання задачі

Для стояка, який представлений на рис. 5.1, вар. 0, що стискається силою $P = 300$ кН, підібрати переріз, який складається з двох швелерних профілів (рис. 5.3, вар. 9). Довжина стояка $l = 5$ м. Матеріал – сталь Ст3. Допустиме напруження на стиск $[\sigma] = 160$ МПа.

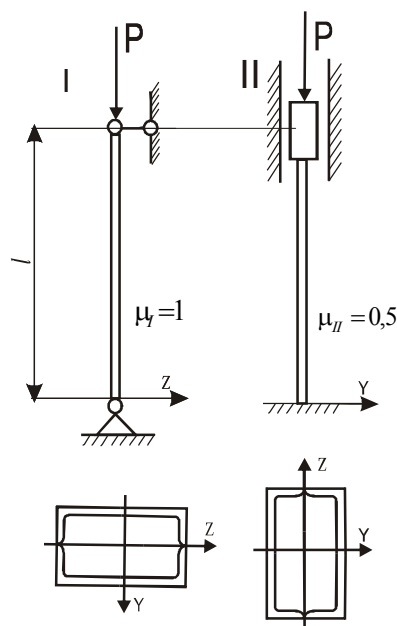


Рис. 5.4. Розрахункова схема

1. Аналізуючи, які в'язі накладе закріплення кінців стояка у двох площинах, будемо розрахункову схему (рис. 5.4) і встановлюємо значення

коефіцієнтів зведення довжини μ у кожній площині. Переріз стояка будемо підбирати, використовуючи умову стійкості

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma], \quad \text{з якої} \quad F = \frac{P}{\varphi[\sigma]}.$$

2. На першому етапі розрахунку задаємось $\varphi_1 = 0,6$. Тоді площа перерізу

$$F_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 38,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 38,7 \text{ см}^2.$$

Розрахункова площа перерізу одного швелера

$$F'_1 = \frac{F_1}{2} = \frac{38,7}{2} = 19,35 \text{ см}^2.$$

За таблицею сортаменту підбираємо швелер № 16а, для якого $F' = 19,5 \text{ см}^2$, $I_{y'} = 823 \text{ см}^4$, $I_{z'} = 78,8 \text{ см}^4$, $b = 6,8 \text{ см}$, $z_0 = 2,00 \text{ см}$.

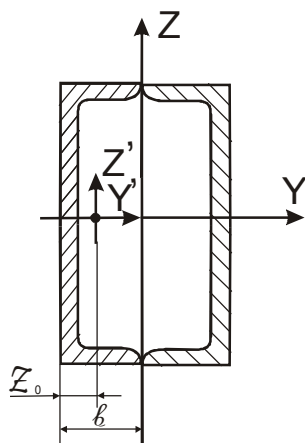


Рис. 5.5. Поперечний переріз стояка

Визначаємо положення головних центральних осей перерізу y, z і обчислюємо головні центральні моменти інерції перерізу (рис. 5.5):

$$I_y = 2I_{y'} = 2 \cdot 823 = 1646 \text{ см}^4;$$

$$I_z = 2 \left[I_{z'} + (b - z_0)^2 F' \right] = 2 \left[78,8 + (6,8 - 2)^2 \cdot 19,5 \right] = 1056,16 \text{ см}^4.$$

Радіуси інерції перерізу:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{1646}{2 \cdot 19,5}} = 6,50 \text{ см};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{1065,16}{2 \cdot 19,5}} = 5,20 \text{ см}.$$

Оскільки $i_y > i_z$, переріз розташовуємо так, щоб вісь y була перпендикулярна до площини, в якій коефіцієнт зведення довжини μ більший (жорсткість закріплення менша), тобто до площини I (див. рис. 5.4). При такій орієнтації перерізу різниця в гнучкості стержня в обох площинах буде мінімальна.

Обчислюємо гнучкості стержня в площинах I і II :

$$\lambda_I = \frac{\mu_I l}{i_y} = \frac{1 \cdot 500}{6,50} = 76,9; \quad \lambda_{II} = \frac{\mu_{II} l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 500}{5,20} = 48,1.$$

Небезпечною є площина I , в якій гнучкість стержня максимальна. Тому подальший розрахунок стержня на стійкість будемо вести в площині I .

За допомогою таблиць для гнучкості знаходимо коефіцієнт φ_1 , що відповідає $\lambda_I = 76,9$. При цьому використовуємо метод інтерполяції. За таблицями для $\lambda = 70$ — $\varphi = 0,81$, для $\lambda = 80$ — $\varphi = 0,75$. Тоді

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 6,9 = 0,77.$$

Оскільки $\varphi'_1 \neq \varphi_1$, переходимо до другого етапу розрахунку.

3. Задаємось другим значенням коефіцієнта

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,6 + 0,77}{2} = 0,69.$$

Знаходимо

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0,69 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,7 \text{ см}^2.$$

Розрахункова площа перерізу швелера

$$F_2' = \frac{F_2}{2} = \frac{31,7}{2} = 15,85 \text{ см}^2.$$

За таблицями сортаменту підбираємо швелер № 14, для якого

$$F' = 15,6 \text{ см}^2; I_{y'} = 491 \text{ см}^4; I_{z'} = 45,4 \text{ см}^4; b = 5,8 \text{ см}; z_0 = 1,67 \text{ см}.$$

Обчислюємо:

$$I_y = 2I_{y'} = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F_2}} = \sqrt{\frac{982}{2 \cdot 15,6}} = 5,6 \text{ см};$$

$$\lambda_I = \frac{\mu_I l}{i_y} = \frac{1 \cdot 500}{5,6} = 89,5.$$

За таблицями для $\lambda_I = 89,5$ методом інтерполяції визначаємо

$$\varphi_2' = 0,69 + \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 0,5 = 0,693.$$

Оскільки різниця між значеннями φ_2 і φ_2' менша 5 %, на останньому перерізі можна зупинитися.

Перевіримо виконання умови стійкості стержня, що складений з двох швелерів № 14:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F} = \frac{350 \cdot 10^3}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 112 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112 \text{ МПа} > \varphi_2' [\sigma] = 0,693 \cdot 160 = 110,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Переріз перевантажено. Підраховуємо його перевантаження:

$$\delta = \frac{112 - 110,9}{110,9} \cdot 100 \% = 1 \% .$$

Перевантаження допустиме, оскільки воно менше 5 %.

Отже заданий стояк необхідно виготовити з швелерів № 14.

Контрольні запитання

1. Назвіть елементи будівельних конструкцій, в яких може виникати тільки осьове стиснення.
2. Яка стискаюча сила називається критичною, та як вона зв'язана з стійкою та нестійкою пружною рівновагою?
3. Який стержень (елемент будівельної конструкції) називають ідеальним?
4. Які форми реалізуються при втраті стійкості стиснутого елемента?
5. Чому в усіх випадках при осьовій стискаючій силі реальний елемент (стержень) завжди втратить стійкість, а ідеальний - ні?
6. Як записується формула Ейлера для визначення критичної сили для ідеального стержня та як впливають умови закріплення стержня на значення цієї сили?
7. У яких границях може використовуватись формула Ейлера?
8. Як визначається гнучкість стержня та на які категорії розділяють стиснуті стержні за гнучкістю?
9. Як визначаються критичні напруження для стержнів великої гнучкості?
10. Як визначаються критичні сили та напруження для стержнів середньої та малої гнучкості?
11. Як записується умова стійкості для стиснутих стержнів та які типи задач можна розв'язати на її основі?
12. У якій послідовності підбираються стиснуті стержні при відомій формі поперечних перерізів?
13. Як визначається коефіцієнт запасу при розрахунках на стійкість та у яких межах він може змінюватись?
14. Як, виходячи з умови стійкості, визначається допустиме значення стискаючої сили?
15. Яким умовам повинен задовольняти стиснутий елемент і як записуються ці умови?

ЗАДАЧА 6

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРІ

Для заданої пружної системи (рис. 6.1, табл 6.1) визначити максимальне напруження, яке виникає в системі при ударі тіла вагою Q . Задане тіло падає з висоти H . Матеріал системи – сталь, h , b – розміри прямокутного поперечного перерізу, d – діаметр круглого перерізу.

Таблиця 6.1. Варіанти завдань до задачі 6

Варіант	Q , кН	H , м	a , м	c , м	h , см	b , см	d , см
0	100	0,02	1	0,5	6	3	–
1	200	0,04	2	1	–	–	6
2	300	0,03	1,5	1	6	2	–
3	400	0,05	2,5	1,5	–	–	4
4	400	0,06	3	1,5	8	3	–
5	600	0,07	3,5	2	–	–	8
6	700	0,01	4	2	10	3	–
7	800	0,08	3	2	–	–	7
8	900	0,09	4	3	10	5	–
9	1000	0,1	2	1,5	–	–	9

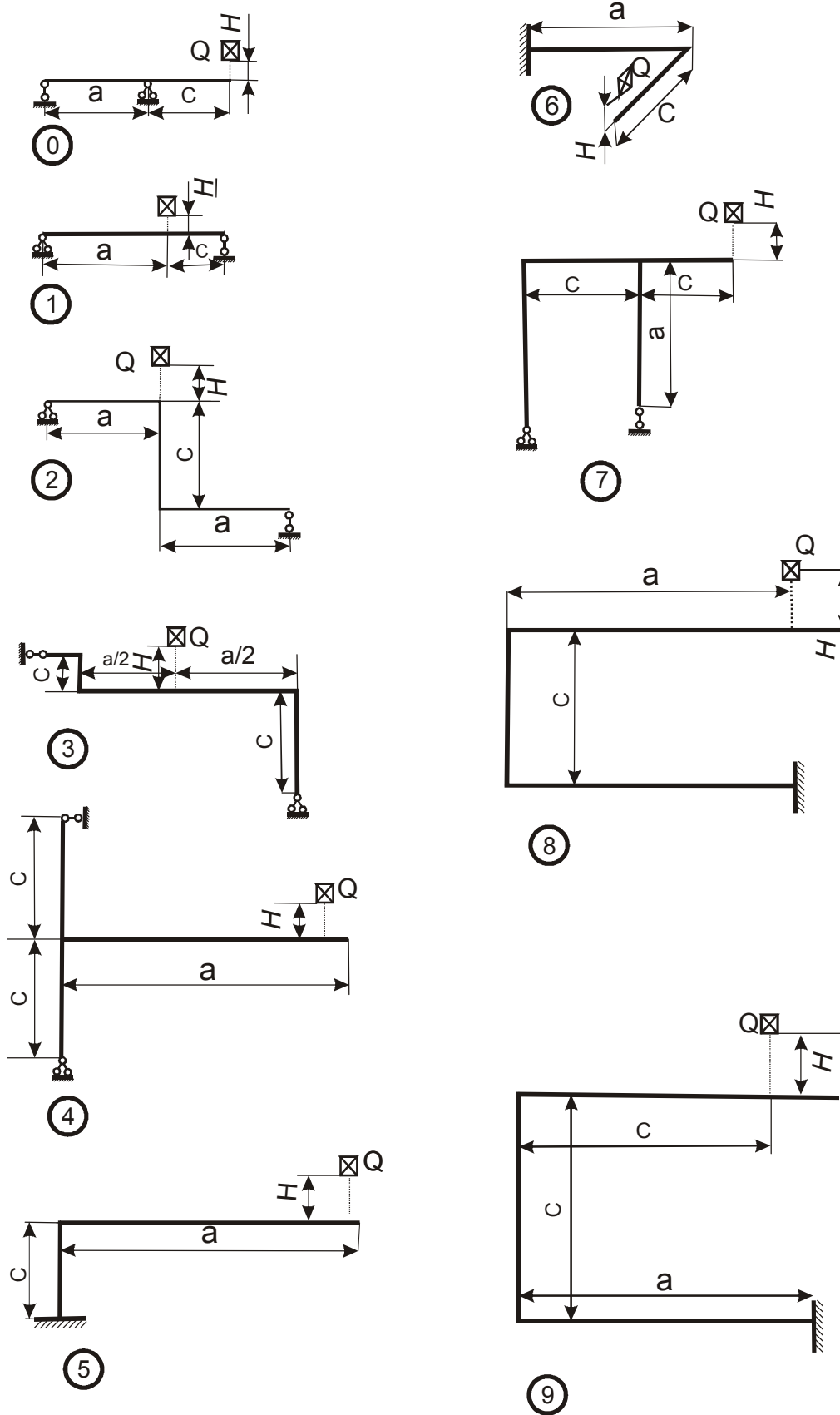


Рис. 6.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 6

План розв'язування задачі

1. Прикласти до системи статично в місці падіння тіла в напрямку падіння силу, що дорівнює вазі тіла, і побудувати епюру згинальних моментів.
2. Визначити будь-яким методом статичне переміщення точки падіння тіла в напрямку падіння.
3. Визначити коефіцієнт динамічності.
4. Визначити максимальне статичне напруження в системі, що виникає від дії ваги тіла.
5. Обчислити максимальне напруження в системі в момент удара (динамічне напруження).

Розв'язання задачі

Дано (рис. 9.2): $Q = 1000$ кН, $H = 0,004$ м, $d = 6$ см, $a = 0,5$ м, $c = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа .

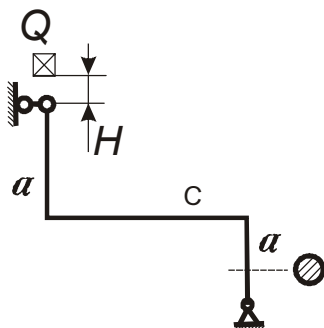


Рис. 6.2. Розрахункова схема

1. Прикладаємо до системи в місці падіння тіла в напрямку падіння статичну силу, що дорівнює вазі тіла, знаходимо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 6.3, а, б):

$$R_B = Q, \quad H_A = H_B = Qc/(2a).$$

2. Обчислюємо статичне переміщення точки падіння груза в вертикальному напрямку, використовуючи метод Верещагіна (або іншим методом). Будуємо епюри згинальних моментів від одиничної сили (рис. 6.3, в).

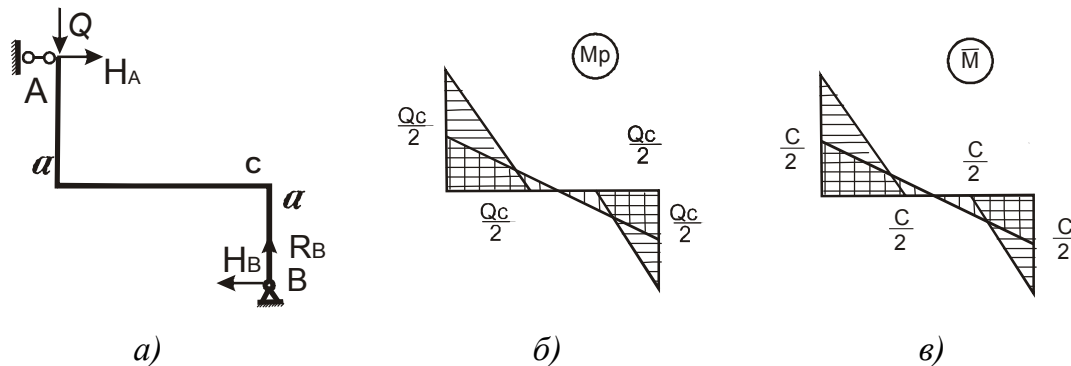


Рис. 6.3. Розрахункова схема (а) та епюри згинальних моментів від сили Q (б) і одиничної сили $Q = 1$ (в) при статичному навантаженні

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1}{EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot c}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2} \right) = \frac{Qc^2}{6EI} \left(a + \frac{c}{2} \right);$$

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 64}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 6^4 \cdot 10^{-8}} = 1,456 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

3. Визначаємо коефіцієнт динамічності:

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,004}{1,456 \cdot 10^{-4}}} = 54,95.$$

4 Знаходимо максимальні статичні напруження. Рама працює на згин, тому

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M}{W} \equiv \frac{Qc}{2W} = \frac{1000 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 0.06^3} = 23,6 \text{ МПа.}$$

5. Визначаємо максимальне напруження в рамі в момент удару Так як в межах закону Гука напруження і переміщення зв'язані лінійними залежностями, то

$$\sigma_{\text{д}} = K_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} = 54,95 \cdot 23,6 = 1297 \text{ МПа.}$$

Контрольні запитання

1. Які основні види динамічних навантажень можна виділити?
2. Що називається коефіцієнтом динамічності?
3. У якій послідовності проводять розрахунок конструкцій на динамічну дію навантажень за наближеною теорією?
4. Як можна зменшити коефіцієнт динамічності при ударі?
5. Які методи визначення статичних прогинів та кутів повороту поперечних перерізів балок Ви знаєте?

ЗАДАЧА 7

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ ЗА ВІДСУТНОСТІ ТЕРТЯ

Ротор електродвигуна має частоту обертання n (рис. 7.1, табл. 7.1). Через неврівноваженість ротора виникає гармонічна змущувальна сила $= F_0 \cos pt$. Модуль пружності при розтягу матеріалу балки $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Маса двигуна m і характеристики перерізу балки I_z , W_z наведені в таблиці 7.1.

Необхідно:

1. Визначити, при якому значенні загальної довжини балки наступить резонанс.
2. Визначити загальну довжину балки, при якій колова частота ω_0 власних коливань системи буде на 30 % більше частоти змущувальної сили F .
3. Для останнього випадку обчислити амплітуду вимушених коливань і максимальні нормальні динамічні напруження в балці. Масою балки знехтувати.

Таблиця 7.1. Варіанти завдань до задачі 7

Варіант	$I_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$m, \text{кг}$	$n, \text{об/хв}$	$F_0, \text{кН}$
0	350	58,4	45	700	2
1	572	81,7	50	600	3
2	873	109	45	800	5
3	350	58,4	39	400	4
4	1290	143	100	500	7
5	1430	159	120	200	2
6	350	58,4	140	300	1
7	572	81,7	150	1800	4
8	1840	184	112	270	3
9	2550	232	150	5410	5

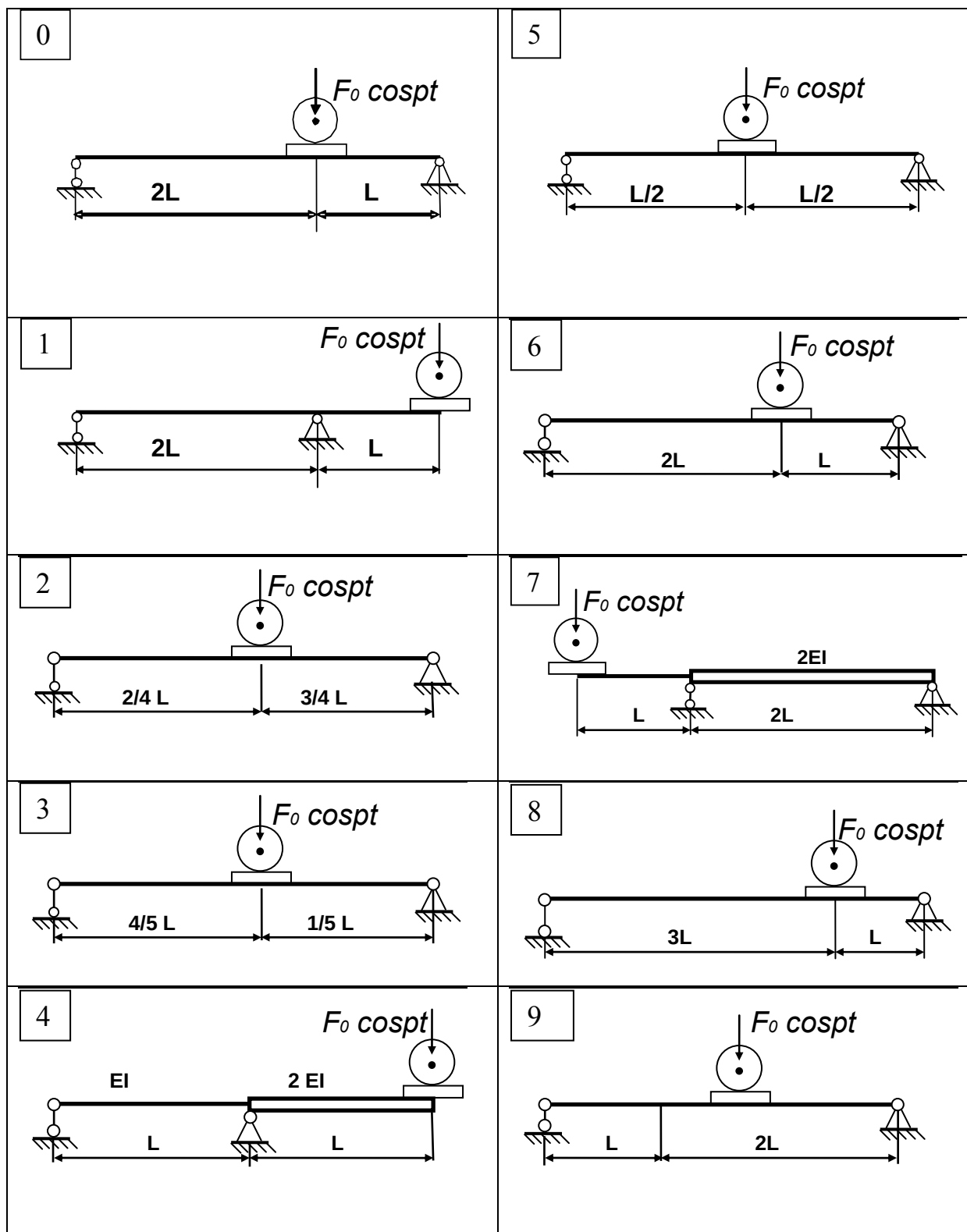


Рис. 7.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 7

План розв'язування задачі

1. Записати диференціальне рівняння малих вимушених коливань системи відносно положення стійкої рівноваги.
2. Визначити статичний прогин $\delta_{\text{ст}}$ балки під дією ваги двигуна Q .
3. Обчислити власну колову частоту системи ω_0 .
4. Визначити частоту змушувальної сили p .
5. Встановити довжину балки, при якій виникає резонанс.
6. Знайти довжину балки, при якій виникають коливання вдалині від резонансу ($\omega_0 = 1,3p$).
7. Визначити амплітуду вимушених коливань балки вдалині від резонансу.
8. Визначити динамічний прогин балки.
9. Визначити коефіцієнт динамічності.
10. Визначити максимальне нормальне напруження $\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}}$ в балці від сили Q .
11. Визначити максимальне динамічне напруження.

Розв'язання задачі

Електродвигун, що встановлений на шарнірно-опертій балці (рис. 7.2), робить $n = \frac{900}{\text{об. хв}}$. Внаслідок неврівноваженості ротора виникає вертикальна складова відцентрової сили інерції $F_0 = 0,2 \text{ кН}$. Маса електродвигуна $m = 100 \text{ кг}$, модуль пружності матеріалу балки $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, момент інерції перерізу балки $I_z = 254 \text{ см}^4$, момент опору $W_z = 37,2 \text{ см}^3$.

1. Запишемо диференціальне рівняння малих вимушених коливань системи відносно положення стійкої рівноваги:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt,$$

де F_0 і p – амплітуда і частота змушувальної сили, ω_0 – власна колова частота.

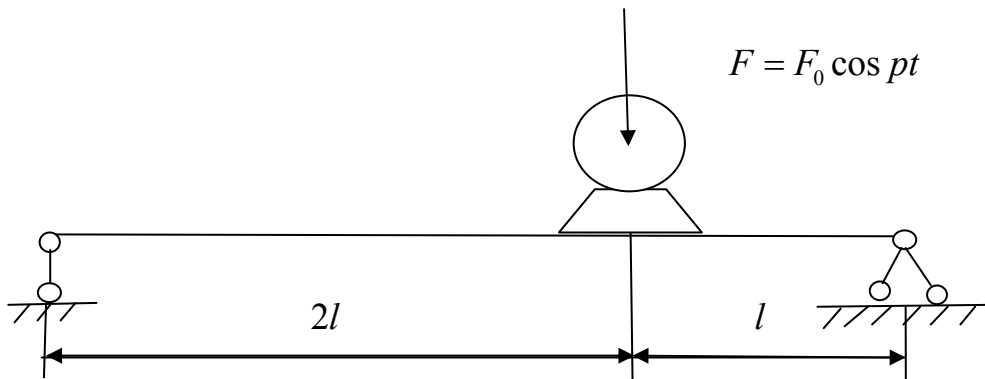


Рис. 7.2. Схема навантаження балки

2. Визначимо статичний прогин $\delta_{\text{ст}}$ балки під дією сили, яка дорівнює вазі двигуна $Q = mg$, методом Мора.

Побудуємо епюри моментів від сили Q та одиничної сили $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 7.3).

Визначимо реакції $\bar{R}_A$ та $\bar{R}_B$:

$$\sum M_B = -Q \cdot 2l + R_B \cdot 3l = 0; \quad R_B = \frac{Q \cdot 2l}{3l} = \frac{2}{3}Q;$$

$$\sum M_A = R_A \cdot 3l + Q \cdot l = 0; \quad R_A = \frac{Q}{3}.$$

Запишемо рівняння M для першої ділянки:

$$M_P^I(x) = R_A \cdot x = \frac{Q}{3}x; \quad I: 0 \leq x \leq 2l;$$

$$M_P^I(0) = 0; \quad M_P(2l) = \frac{2}{3}Ql.$$

Для другої ділянки:

$$M_P^{II}(x) = R_B \cdot x = \frac{2}{3}Q \cdot x; \quad II: 0 \leq x \leq l;$$

$$M_P''(0) = 0; \quad M_P''(l) = \frac{2}{3}Ql.$$

Будуємо допоміжну систему, яку навантажуюмо одиничною силою в точці прикладання сили Q .

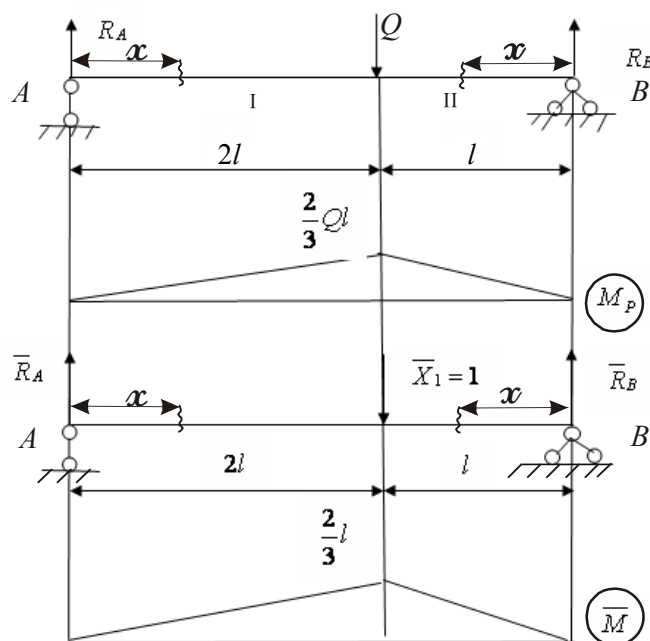


Рис. 7.3. Епюри згинальних моментів

Визначаємо реакції $\bar{R}_A$ та $\bar{R}_B$:

$$\sum M_A = -\bar{X}_1 \cdot 2l + \bar{R}_B \cdot 3l = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{2}{3};$$

$$\sum M_B = -\bar{R}_A \cdot 3l + \bar{X}_1 \cdot l = 0; \quad \dots \quad \bar{R}_A = \frac{1}{3}.$$

Запишемо рівняння моментів від одиничної сили для першої та другої ділянок:

$$I: 0 \leq x \leq 2l: \quad \bar{M}^I(x) = \frac{1}{3}x;$$

$$II: 0 \leq x \leq l: \quad \overline{M}''(x) = \frac{2}{3}x.$$

Обчислимо інтеграли Мора (на 2-х ділянках):

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ст}} &= \int_0^{2l} \frac{M_p^I \overline{M}^I}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_p^{II} \overline{M}^{II}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{2l} \frac{1}{3} Qx \cdot \frac{1}{3} x dx + \int_0^l \frac{2}{3} Qx \cdot \frac{2}{3} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{27} \Big|_0^{2l} + \frac{4Qx^3}{27} \Big|_0^l \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{8Ql^3}{27} + \frac{4Ql^3}{27} \right) = \frac{12Ql^3}{27EI} = \frac{4Ql^3}{9EI}. \end{aligned}$$

Отже $\delta_{\text{ст}} = \frac{4Ql^3}{9EI}.$

3. Запишемо формулу для колової власної частоти ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{СТ}}}} = \sqrt{\frac{9gEI}{4Ql^3}}.$$

4. Частота змушувальної сили визначається за формулою

$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{900 \cdot 3,14}{30} = 94,2 \text{ с}^{-1}.$$

5. Визначимо довжину l балки, при якій виникає резонанс ($p = \omega_0$):

$$\sqrt{\frac{9gEI}{4Ql^3}} = 94,2;$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{9gEI}{4Q(94,2)^2}};$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 100 \cdot 9,81 \cdot 8873,64}} = \sqrt[3]{1,288} = 1,09 \text{ м}.$$

Загальна довжина балки буде складати

$$l + 2l = 3l = 3 \cdot 1,09 = 3,27 \text{ м.}$$

6. Довжину балки l_1 , при якій частота ω_0 перевищує частоту p на 30 % визначимо із співвідношення

$$\omega_0 = 1,3p,$$

тоді

$$l_1 = \sqrt[3]{\frac{9gEI}{4Q(1,3p)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 9,81 \cdot 100 \cdot 1,69 \cdot 8873,64}} = \sqrt[3]{0,7621} = 0,92 \text{ м.}$$

Загальна довжина балки буде складати

$$l_1 + 2l_1 = 3l_1 = 3 \cdot 0,92 = 2,76 \text{ м.}$$

7. Амплітуда вимушених коливань вдалині від резонансу за відсутності тертя дорівнює

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)} = \frac{200}{100[(1,3 \cdot 94,2)^2 - (94,2)^2]} = \frac{200}{100[14996,45 - 8873,64]} = 0,326 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

8. Визначимо динамічний прогин балки:

$$\delta_d = \delta_{ст} + A = \delta_{ст} \left(1 + \frac{A}{\delta_{ст}}\right) = \delta_{ст} K_d.$$

Формула для обчислення $\delta_{ст}$ одержана в п. 2:

$$\delta_{ст} = \frac{4Ql_1^3}{9EI} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 9,8 \cdot 0,92^3}{9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}} = 0,66 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_d = 0,66 \cdot 10^{-3} + 0,326 \cdot 10^{-3} = 0,986 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Обчислимо коефіцієнт динамічності:

$$K_d = 1 + \frac{A}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{0,326 \cdot 10^{-3}}{0,66 \cdot 10^{-3}} = 1 + 0,49 = 1,49.$$

9. Визначимо максимальне нормальне напруження від сили $Q = mg$.

З епюри моментів (див. рис. 7.2):

$$M_{\max} = \frac{2}{3} Q l_1;$$

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 9,8 \cdot 0,92}{3} = 601,06 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{601,06}{37,2 \cdot 10^{-6}} = 16,16 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 16,16 \text{ МПа}.$$

Максимальне нормальне динамічне напруження дорівнює

$$\sigma_d^{\max} = K_d \sigma_{ст}^{\max} = 1,49 \cdot 16,16 = 24,07 \text{ МПа}.$$

Контрольні запитання

1. Записати рівняння малих вимушених коливань.
2. Колова частота системи і її визначення.
3. Частота змушувальної сили і її визначення.
4. Амплітуда вимушених коливань системи.
5. Обґрунтування коефіцієнта динамічності.
6. Визначення динамічних напружень.

ЗАДАЧА 8

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ КРУГЛОГО ВАЛА НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

Використовуючи дані і результати розв’язання задачі 4, уточнити величину діаметру сталевго вала, на якому закріплено шків пасової передачі та два зубчастих колеса (див. рис. 4.1, табл. 4.1), у розрахунку додатково врахувати циклічність дії згинального моменту та вплив конструктивних і технологічних факторів (табл. 8.1) на границю витривалості.

Таблиця 8.1. Варіанти завдань до задачі 8

Варіант	Чистота обробки	Матеріал	Границя міцності, МПа	Границя текучості, МПа	Границя витривалості, МПа
			σ_B	σ_T	σ_{-1}
0	Поліров.	Сталь 60	690	410	310–380
1	Шліфув.	Сталь 55	660	390	290–370
2	Тонк.обт.	Сталь 50	640	380	270–350
3	Груб.обт.	Сталь 45	610	360	250–340
4	Наяв.окал.	Сталь 40	580	340	230–320
5	Поліров.	Сталь 35	540	320	220–300
6	Шліфув.	Сталь 30	500	300	200–270
7	Тонк.обт.	Сталь 25	460	280	190–250
8	Груб.обт.	Сталь 20	420	250	170–220
9	Наяв.окал.	Сталь 10	340	210	160–220

План розв’язування задачі

1. Накреслити епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах згідно з результатами розрахунків, виконаних у задачі 4.

2. Визначити коефіцієнти запасу за нормальними n_σ і дотичними n_τ напруженнями в небезпечних перерізах валу для величини діаметру, визначеного за результатами статичного розрахунку.

3. Обчислити за формулою Гафа і Полларда повний коефіцієнт запасу вала відносно границі витривалості n . За результатами розрахунків зробити висновки.

4. У випадку невиконання умови міцності ($\min\{n_\tau, n\} < [n]$), повторити розрахунки, обравши нове значення діаметру вала. Підбір діаметру вала продовжувати до забезпечення виконання умови міцності.

Розв'язання задачі

Дано: діаметр вала $d = 96$ мм; $a = 1$ м; матеріал – сталь 20; нормативний коефіцієнт запасу міцності $[n] = 2$. Поверхня вала шліфувана. Схема навантаження вала представлена на рис. 4.2. З таблиці 8.1 беремо: $\sigma_B = 420$ МПа, $\sigma_T = 250$ МПа, $\sigma_{-1} = 170$ МПа.

1. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними задачі 4, будуємо епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах згідно з результатами розрахунків, виконаних у задачі 4 (рис. 4.4), визначаємо ймовірно небезпечні перерізи вала.

Раніше було зроблено висновок, що небезпечним є переріз B . Тут діє максимальний крутний момент ($M_{кр} = 0,6$ кН·м) та максимальний сумарний згинальний момент ($M_c = 14,4$ кН·м).

Крім того, слід перевірити переріз I , де закріплено зубчасте колесо, через наявність в цьому місці концентратора у вигляді шпонкової канавки, що оброблена пальцевою фрезою. Тут діє максимальний крутний момент ($M_{кр} = 0,6$ кН·м) та сумарний згинальний момент ($M_c = 11,7$ кН·м).

2. В умовах плоского напруженого стану за наявності нормальних і дотичних напружень повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість розраховується за формулою Гафа і Полларда:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

де n_{σ} і n_{τ} – коефіцієнти запасу за нормальними та дотичними напруженнями відповідно.

Визначимо коефіцієнти запасу n_{σ} і n_{τ} в небезпечних перерізах вала.

Відповідно до умов навантаження, нормальні напруження у небезпечній точці перерізу змінюються за симетричним циклом, а дотичні напруження залишаються сталими.

У випадку симетричного циклу коефіцієнт запасу обчислюється за формулою:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_a},$$

де σ_a – амплітуда фактично діючих напружень, K – загальний коефіцієнт зниження границі витривалості, що враховує сукупний вплив основних конструктивних і технологічних факторів на витривалість деталі при симетричному циклі.

У загальному випадку коефіцієнт K визначається таким чином:

$$K = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n},$$

де $\alpha_i > 1$, $\gamma_i < 1$ – коефіцієнти, що враховують негативний вплив кожного з факторів. Якщо вплив факторів позитивний (наприклад, зміцнення поверхні), то коефіцієнти α_i і γ_i необхідно поміняти місцями.

У практичних розрахунках на втому найбільш поширеним є варіант коефіцієнту зниження границі витривалості, коли враховується вплив тільки трьох факторів: концентрації напружень, розмірів деталі і якості обробки поверхні. Вплив цих факторів оцінюється коефіцієнтами K_{σ} , ε і β відповідно. Якщо $K_{\sigma} > 1$, $\varepsilon < 1$, $\beta < 1$, то

$$K = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon \beta},$$

де K_{σ} – ефективний коефіцієнт концентрації напружень, ε – коефіцієнт впливу абсолютних розмірів перерізу, β – коефіцієнт впливу стану і якості поверхні.

Знаходимо номінальні амплітудні напруження σ_a , що діють у ймовірно небезпечних перерізах.

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 9,6^3}{32} = 86,815 \text{ см}^3.$$

Переріз B :

$$\sigma_a^B = \sigma_{\max} = \frac{M_c^B}{W} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{86,815 \cdot 10^{-6}} \approx 166 \text{ МПа}.$$

Переріз I :

$$\sigma_a^I = \sigma_{\max} = \frac{M_c^I}{W} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{86,815 \cdot 10^{-6}} \approx 135 \text{ МПа}.$$

Визначимо коефіцієнти концентрації напружень в небезпечних перетинах K_{σ}^B і K_{σ}^I . Коефіцієнт $K_{\sigma}^B = 1$ (концентратори відсутні). Згідно з додатком, де наведено значення ефективних концентраторів K_{σ} в залежності від границі міцності матеріалу вала із шпонковим пазом, обробленого пальцевою фрезою, $K_{\sigma}^I = 1,51$.

Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ($\varepsilon_{\sigma} \approx \varepsilon_{\tau}$) знайдемо у додатку. Для вуглецевої сталі з границею міцності $\sigma_B = 420 \text{ МПа}$ та діаметром $d = 96 \text{ мм}$ коефіцієнт буде становити $\varepsilon_{\sigma} = 0,7$.

Коефіцієнт впливу стану і якості поверхні β визначимо з додатку. Для шліфованої поверхні і заданої сталі $\beta = 0,95$.

Обчислимо загальний коефіцієнт зниження границі витривалості для небезпечних перерізів.

Переріз B :

$$K^B = \frac{1}{0,7 \cdot 0,95} = 1,5.$$

Переріз I :

$$K^I = \frac{1,51}{0,7 \cdot 0,95} = 2,27.$$

Тоді $n_{\sigma}^B = \frac{170}{1,5 \cdot 166} = 0,683;$ $n_{\sigma}^I = \frac{170}{2,27 \cdot 135} = 0,555.$

Визначимо коефіцієнт запасу статичної міцності при крученні.

$$n_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}}.$$

Границю текучості при крученні визначимо за третьою теорією міцності.

$$\tau_T = 0,5\sigma_T = 0,5 \cdot 250 = 125 \text{ МПа}.$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 9,6^3}{16} = 173,63 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{\max}^B = \tau_{\max}^I = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{600}{173,63 \cdot 10^{-6}} = 3,46 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_{\tau} = \frac{125}{3,46} = 36,13.$$

3. Обчислюємо повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість за формулою Гафа і Полларда:

$$n = \frac{0,555 \cdot 36,13}{\sqrt{(0,555)^2 + (36,13)^2}} = \frac{20,052}{36,134} = 0,555.$$

Отже

$$n = 0,555 < [n] = 1,8.$$

Тобто, умова міцності не виконується. Врахування циклічності згинального моменту привело до зменшення коефіцієнту запасу у $1,5/0,555 = 2,7$ рази.

4. Вибираємо нове значення діаметру вала і повторюємо розрахунки, виконані у пп. 2, 3.

Нехай діаметр валу $d = 150$ мм. Тоді маємо наступні геометричні характеристики перерізу:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 15^3}{32} = 331,17 \text{ см}^3, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 15^3}{16} = 662,34 \text{ см}^3.$$

Знаходимо амплітуди нормальних напружень у ймовірно небезпечних перерізах:

$$\sigma_a^B = \sigma_{\max} = \frac{M_c^B}{W} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{331,17 \cdot 10^{-6}} = 43,48 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^I = \sigma_{\max} = \frac{M_c^I}{W} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{331,17 \cdot 10^{-6}} = 35,33 \text{ МПа}.$$

За допомогою лінійної інтерполяції даних, що наведені у додатку, визначаємо нове значення масштабного коефіцієнта:

$$\varepsilon_\sigma = 0,67.$$

Тоді

$$K^B = \frac{1}{0,67 \cdot 0,95} = 1,57; \quad n_\sigma^B = \frac{170}{1,57 \cdot 43,48} = 2,49.$$

$$K^I = \frac{1,51}{0,67 \cdot 0,95} = 2,37, \quad n_\sigma^I = \frac{170}{2,37 \cdot 35,33} = 2,03.$$

$$\tau_{\max}^B = \tau_{\max}^I = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{600}{662,34 \cdot 10^{-6}} = 0,91 \text{ МПа};$$

$$n_\tau = \frac{125}{0,91} = 137,36.$$

Обчислюємо повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість:

$$n = \frac{2,03 \cdot 137,36}{\sqrt{(2,03)^2 + (137,36)^2}} = \frac{278,84}{137,37} = 2,03;$$

$$n = 2,03 > [n] = 2.$$

Умова міцності виконується. Остаточно, діаметр вала буде становити $d = 150$ мм.

Контрольні запитання

1. Що таке повторно-змінні навантаження?
2. Втомленність матеріалів.
3. Коефіцієнт запасу міцності при розрахунках на витривалість.
4. Цикл напружень і його визначення.
5. Концентратори напружень і їх вплив на витривалість.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Рекомендований ряд лінійних розмірів R 40

1,0	1,6	2,5	4,0	6,3	10	16	25	40	63	100	160
1,05	1,7	2,6	4,2	6,7	10,5	17	26	42	67	105	170
1,1	1,8	2,8	4,5	7,1	11	18	28	45	71	110	180
1,15	1,9	3,0	4,8	7,5	11,5	19	30	48	75	120	190
1,2	2,0	3,2	5,0	8,0	12	20	32	50	80	125	200
1,3	2,1	3,4	5,3	8,5	13	21	34	53	85	130	210
1,4	2,2	3,6	5,6	9,0	14	22	36	56	90	140	220
1,5	2,4	3,8	6,0	9,5	15	24	38	60	95	150	240

Додаток 2

Залежність ефективних коефіцієнтів концентрації K_σ і K_τ від границі міцності σ_B матеріалу вала зі шпонковим пазом, який оброблено пальцевою фрезою.

σ_B , МПа	K_σ	K_τ	σ_B , МПа	K_σ	K_τ
400	1,51	1,20	800	2,01	1,86
500	1,64	1,37	900	2,14	2,05
600	1,76	1,54	1000	2,26	2,22
700	1,89	1,71	1200	2,50	2,39

Додаток 3

Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ($\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$) у залежності від діаметра деталі й матеріалу

Матеріал	$\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$ при d , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Вуглецева сталь $\sigma_B = 400 - 500$ МПа	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Вуглецева і легована сталь $\sigma_B = 500 - 800$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легована сталь $\sigma_B = 800 - 1200$ МПа	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легована сталь $\sigma_B = 1200 - 1400$ МПа	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

Список використаних джерел

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Б.С. Опір матеріалів: підруч. Київ: Вища школа. 2004. 655 с.
2. Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій: навч. посіб. Київ: Вища освіта, 2005. 367 с.
3. Цурпал І.А., Пастушенко С.І., Барабан М.П., Швайко В.М. Механіка матеріалів і конструкцій. Лабораторні роботи: навч. посіб. для вузів. Київ: Аграрна освіта, 2001. 272 с.
4. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. М.І. Бобир, А.Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; За ред. М.І. Бобиря. Київ: Вища школа, 2008. 399 с.
5. Корнілов С.А. Опір матеріалів. Київ: Логос, 2000. 551с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів. Львів: «Новий світ», 2006. 364 с.
7. Піскунов В.Г., Присяжнюк В.К. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Підручник в 3-х кн. Київ: Вища школа. 1995.
8. Булгаков В.М. Машини та технологічне обладнання вібраційної дії. Київ: Хай-тек прес, 2013. 279 с.
9. Кагадій С.В. Основи механіки матеріалів і конструкцій. Дніпропетровськ: «Свідлер А.Л.», 2011. 416 с.
10. Нахайчук В.Г. Технічна механіка. Кн. 2. Опір матеріалів. Київ: НМК ВО 1992. 271 с.

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

ЧАСТИНА 2

В.С. Ткачук, В.В. Девін, В.Ю. Бурдега

Методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів першого

(бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей:

208 «Агроінженерія», 274 «Автомобільний транспорт»

Редактор Ткачук В.С.

Комп'ютерна верстка Ткачук В.С.

Підписано до друку _____ 2025 р. Формат 30x42/2 (60x90)

Папір офсетний. Ризографія. Авт. арк. 76.

Обл.-вид. арк. ____ . У. д. а. ____ Тираж 50 прим. Зам. ____ .

Підготовлено до друку та видруковано у

Закладі вищої освіти «Подільський державний університет».

32300, Хмельницька область, Кам'янець-Подільський, вул. Шевченка, 13.