

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ «ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ЕНЕРГЕТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

*Кафедра інформаційних технологій, фізико-
математичних та безпекових дисциплін*

**Вища математика
Частина 1
Методичні рекомендації
для здобувачів першого(бакалаврського) рівня
вищої освіти
спеціальності 181 «Харчові технології»**

м.Кам'янець-Подільський
2023рік

УДК: 51:378.147.88 (075.8)
С-30

Укладачі:

Марчук Наталія Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Семенишина Ірина Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент.

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Подільського державного університету
(протокол № від . .2023)*

Рецензенти:

Сморжевський Юрій Людвігович,
кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.
Приліпко Тетяна Миколаївна,
доктор сільськогосподарських наук, професор, завідувач кафедри харчових технологій виробництва й стандартизації харчової продукції Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»

Методичні рекомендації для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 181 «Харчові технології» / Н.А. Марчук, І.В. Семенишина. Кам'янець-Подільський: ЗВО ПДУ, 2023. –163с.

ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації написано відповідно до діючих програм з вищої математики для здобувачів вищих навчальних закладів. Вони складається з трьох частин. Частина I рекомендацій містить два розділи. Тут розглядаються елементи лінійної та векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії.

У навчально- методичних рекомендаціях викладено лаконічно, послідовно і доступно програмний матеріал, який підкріплюється багатьма розв'язаними задачами та прикладами.

До кожного розділу додано вправи та варіанти завдань для самостійного закріплення теоретичного матеріалу.

Методичні рекомендації можуть бути використані також здобувачами інших спеціальностей ВУЗу та спеціалістами практиками, які хочуть поповнити математичну освіту та застосовувати її на практиці.

У методичних рекомендаціях нумерація формул та прикладів дається в кожному розділі окремо, а нумерація рисунків – у межах кожної частини розробок. Символи ▲ і ▼ в тексті означають відповідно початок і кінець розв'язання прикладу чи задачі, а символи ●, ○ – відповідно початок і кінець формулювання властивостей, правил та доведення теорем. Посилання на формули та перетворення, які використовуються при розв'язанні прикладів, записуються в квадратних дужках.

РОЗДІЛ І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ І ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Розв'яжемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

де x_1, x_2 – невідомі, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – їх коефіцієнти, а b_1, b_2 – вільні члени системи.

Таблиця з коефіцієнтів системи

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

називається **матрицею 2-го порядку** системи (1.1) (позначається великими буквами A, B, C тощо):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Горизонтальні ряди матриці (1.3) називають її **рядками**, а вертикальні – **стовпцями**; a_{ij} (i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть a_{ij}), називають **елементами** матриці (1.3). Елементи a_{11}, a_{22} утворюють діагональ, що називається **головною** діагоналлю матриці, а елементи a_{12}, a_{21} – **побічну** діагональ.

Розв'яжемо систему (1.1) методом вилучення невідомих. **Розв'язком** цієї системи називається така впорядкована пара чисел x_1, x_2 , підстановка яких відповідно замість x_1, x_2 перетворює кожне рівняння системи в тотожність.

Помножимо обидві частини першого рівняння на a_{22} , другого – на $(-a_{12})$ і додамо їх; потім помножимо обидві частини першого рівняння на $(-a_{21})$, другого – на a_{11} і додамо їх, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \end{cases} \quad (1.4)$$

еквівалентну (1.1).

Множники при x_1, x_2 і вирази в правих частинах системи (1.4) побудовані однаково. Наприклад, вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ має таку конструкцію: із добутку елементів головної діагоналі матриці (1.2) віднімається добуток елементів її побічної діагоналі. Аналогічну структуру мають вирази в правих частинах рівнянь системи (1.4), коли в матриці (1.2) відповідно її стовпці замінюються стовпцем вільних членів.

Означення 1. Визначником (детермінантом) другого порядку матриці (1.2) називається алгебраїчний вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Позначається визначник символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.5)$$

(використовують ще інше позначення: $\det A, |A|$). a_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) – елементи визначника. Індекси i, j елементів визначника означають: перший – номер рядка, другий – номер стовпця (читається, наприклад, a_{12} : "а – один-два").

Отже, за означеннями матриця – це таблиця, а визначник – алгебраїчний вираз.

Елементи a_{11}, a_{22} утворюють *головну*, а a_{12}, a_{21} – *побічну* діагональ визначника.

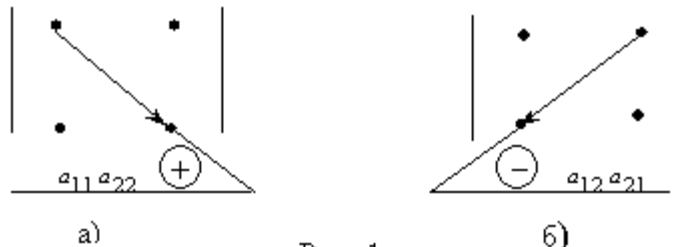


Рис .1

Визначник (1.5) із його символічного позначення будується (обчислюється) за схемою: перший доданок є добутком елементів головної діагоналі (рис.1.а), а другий – добуток елементів побічної діагоналі (рис.1.б). Доданки визначника називаються його **членами**.

У системі (1.4) праві частини за побудовою визначника Δ є також визначниками:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Систему (1.4) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \Delta \times x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \times x_2 = \Delta_2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Поняття визначника 3-го порядку дістанемо при розв'язуванні системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

де

є основна матриця системи (1.7).

При розв'язуванні системи (1.7) методом вилучення невідомих дістанемо еквівалентну їй систему:

$$\begin{cases} \Delta \times x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \times x_2 = \Delta_2, \\ \Delta \times x_3 = \Delta_3, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

називається **визначником третього порядку** матриці (1.8); $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, за побудовою визначника Δ системи (1.7) є також визначники, які одержуємо з матриці (1.8) заміною елементів відповідно першого, другого або третього стовпців елементами вільних членів системи. **Порядок** визначника дорівнює кількості його рядків і стовпців.

Як для визначників 2-го порядку, так і для визначників 3-го порядку, a_{ij} ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}$) називаються елементами визначника і його матриці; a_{11}, a_{22}, a_{33} – головна діагональ, а a_{13}, a_{22}, a_{31} – побічна діагональ визначника 3-го порядку. Визначник (1.10), з його символічного позначення будуємо (обчислюємо) за так званим **правилом трикутників (правилом Саррюса)**, як схематично показано на рис.2.а. (для додатних членів): $a_{11} a_{22} a_{33}$ – добуток елементів головної діагоналі, $a_{12} a_{23} a_{31}$, $a_{13} a_{21} a_{32}$ – добуток елементів, які розглядаються як вершини рівнобедрених трикутників з основами, паралельними до головної діагоналі; та на рис.2.б (для від'ємних членів): $a_{13} a_{22} a_{31}$ – добуток елементів побічної діагоналі, $a_{11} a_{23} a_{32}$, $a_{12} a_{21} a_{33}$ – добуток елементів, які розглядаються як вершини рівнобедрених трикутників з основами, паралельними до побічної діагоналі.

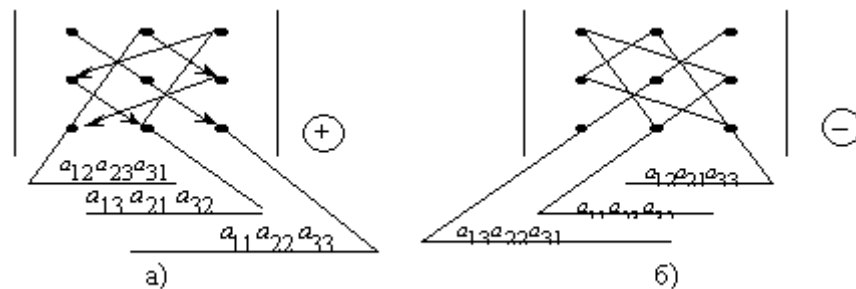


Рис. 2

Правило обчислення визначника 3-го порядку можна також побудувати за іншою схемою (рис.3). За цією схемою, справа від таблиці матриці (1.8) дописуємо її перші два стовпця, дістанемо прямокутну таблицю (рис.3), з якої члени визначника (1.10) з додатними знаками є сума добутоків елементів головної діагоналі матриці та добутоків елементів на прямих, паралельних до неї (на схемі зображено суцільною лінією), а члени з від'ємними знаками – сума добутоків елементів побічної діагоналі матриці та добутоків елементів на

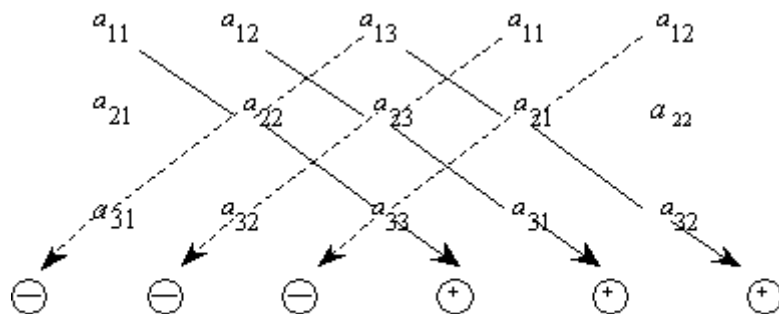


Рис. 3

прямих, паралельних до неї (на схемі показано пунктирною лінією).

Приклади. Обчислити визначники:

№1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; №2. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$; №3. $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$;

№4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

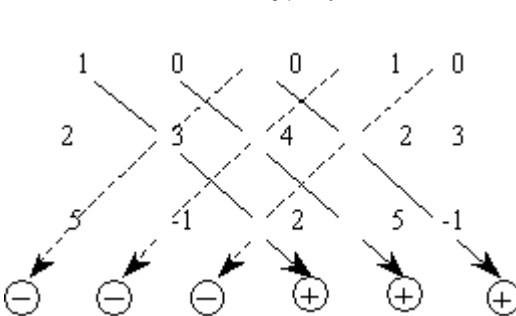
⊖ ↗ ↘ ⊕ ▲ №1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 8 + 3 = 11.$ ▼

▲ №2. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta).$ ▼

▲ №3. $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \times \frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{2t}{1-t^2} \times \frac{2t}{1-t^2} =$

$= \frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4}{1-2t^2+t^4} = 1.$ ▼

▲ №4.



$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b+a-b)(a+b-a+b) = 2a \times 2b = 4ab. \blacktriangledown$$

Приклади. Обчислити визначники:

№5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; №6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; №7. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$

▲ №5.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times (-4) \times 3 - 2 \times 3 \times$$

$$2 - 2 \times 1 \times 3 - 1 \times (-4) \times 5 = 30 + 2 - 24 - 12 - 6 + 20 = 10. \blacktriangledown$$

▲ №6.

$$\Delta = 1 \times 3 \times 2 + 0 \times 4 \times 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 0 \times 2 \times 2 = 6 + 4 = 10.$$



▲ №7.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \times 0 \times 1 + 0 \times 1 \times 0 + 1 \times b \times b -$$

$$-1 \times 0 \times 0 - 0 \times 1 \times b - 0 \times b \times 1 = b^2. \blacktriangledown$$

Приклад № 8. Довести, якщо a, b, c – довжини сторін трикутника, а α, β, γ – відповідно їх протилежні кути, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & b \sin \alpha & c \sin \alpha \\ b \sin \alpha & 1 & \cos \alpha \\ c \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

▲ Обчислимо визначник Δ за правилом трикутника:

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 + bc \sin^2 \alpha \cos \alpha + bc \sin^2 \alpha \cos \alpha - c^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha - \\ &- b^2 \sin^2 \alpha = a^2(1 - \cos^2 \alpha) - (c^2 + b^2) \sin^2 \alpha + 2bc \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= a^2 \sin^2 \alpha - (c^2 + b^2) \sin^2 \alpha + 2bc \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos \alpha) \sin^2 \alpha = 0, \text{ оскільки, за теоремою косинусів,} \\ &a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \blacktriangledown \end{aligned}$$

1.1. Основні властивості визначників

Основні властивості визначників розглянемо на прикладі визначників 2-го порядку.

● 1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідно стовпцями, а стовпці – рядками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість називається операцією **транспонування**; вона означає, що всі властивості визначника відносно його рядків і стовпців однакові.

Ця та наступні властивості доводяться безпосередньо обчисленням визначників.

● 2. При перестановці рядків (стовпців) визначник змінює

знак:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість називається властивістю **антисиметрії**.

● 3. Якщо всі елементи одного рядка (стовпця) визначника помножити на деяке число $\alpha \neq 0$, то визначник помножиться на це

число:
$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(спільний множник елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника).

● 4. Якщо елементи одного рядка (стовпця) визначника пропорційні елементам іншого, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

(якщо $\alpha = 1$, тоді рядки (стовпці) визначника однакові; він дорівнює нулю).

● 5. Якщо до елементів одного рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого, помножені на число $\alpha \neq 0$, то визначник не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

● 6. Якщо елементи, наприклад, першого стовпця визначника є сумою двох доданків, то він розкладається на суму двох визначників, у першому з яких елементи першого стовпця є перші доданки, а в другому визначнику елементи першого стовпця є другі доданки, а елементи других стовпців є відповідно елементи другого стовпця даного визначника:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta \tilde{a}_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta \tilde{a}_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & a_{12} \\ \tilde{a}_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість називається *лінійною* властивістю визначника.

● 7. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють

нулю, то він дорівнює нулю, наприклад : $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Приклади. Обчислити визначники:

№9. $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix};$ №10. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$

▲ №9. $\Delta = \begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} = [\text{за властивістю 6}] =$

$$= \begin{vmatrix} am & an+bq \\ cm & cn+dq \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & an+bq \\ dp & cn+dq \end{vmatrix} = [\text{за властивістю 6}] =$$

$$= \begin{vmatrix} am & an \\ cm & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} am & bq \\ cm & dq \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & an \\ dp & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & bq \\ dp & dq \end{vmatrix} = [\text{за властивістю 3}] =$$

$$= mn \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + mq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + pn \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + pq \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} =$$

перший та четвертий
визначники, за властивістю 4,
дорівнюють нулю, а другий
визначник, за властивістю 2,
відрізняються за знаком від
третього

$$= mq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - pn \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (mq - pn) = (ad - bc)(mq - pn). \blacktriangledown$$

▲ №10. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13547 & 13547 + 100 \\ 28423 & 28423 + 100 \end{vmatrix} = [\text{за властивістю 6}] =$

$$= \begin{vmatrix} 13547 & 13547 \\ 28423 & 28423 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{перший визначник, за властивістю 4,} \\ \text{дорівнює нулю; другий обчислюємо за} \\ \text{властивістю 5} \end{array} \right] = 100 \begin{vmatrix} 13547 & 1 \\ 28423 & 1 \end{vmatrix} = 100(13547 - 28423) = -1487600. \blacktriangledown$$

1.2. Побудова визначників другого і третього порядку. Означення визначника n -го порядку

1). Визначник 2-го порядку має $2!$ (читається "два-факторіал", $2! = 1 \times 2$), а визначник 3-го порядку – $3!$ ($3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$) членів.

2). Кожний член визначника 2-го порядку є добуток двох елементів, а визначника 3-го порядку – добуток трьох елементів, взятих по одному елементу з кожного рядка визначника і з кожного його стовпця.

Поняття інверсії (безпорядка) в перестановці

Нехай, наприклад, є розміщення чисел: (1 2 3 4 5). Їх можна впорядкувати іншими способами. Будь-яке розміщення n чисел в деякому порядку називається *перестановкою* із n чисел. Так з розміщення (1 2 3 4 5) можна утворити $5!$ різних перестановок. Якщо в перестановці попереду меншого числа є більше, то таке розміщення чисел називається *інверсією*. В перестановці (1 5 4 2 3) п'ять інверсій (попереду числа 4 стоїть більше число 5 – це одна інверсія; попереду 2 – два більших за нього числа: 5 і 4, це дві інверсії; а попереду числа 3 – також два більших за нього числа, тобто дві інверсії; всього в цій перестановці п'ять інверсій).

3). Якщо перші індекси елементів членів визначників (1.5) і (1.10) є в натуральному порядку, то другі індекси елементів цих членів утворюють перестановки з інверсією k . Тоді знак членів визначників дорівнює $(-1)^k$.

Розглянемо члени визначника (1.10). Другі індекси елементів членів цього визначника відповідно є перестановками:

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3), \text{ число інверсій } k &= 0, \text{ знак } (-1)^0 = +1; \\ (2\ 3\ 1), \quad k &= 2, \quad (-1)^2 = 1; \\ (3\ 1\ 2), \quad k &= 2, \quad (-1)^2 = 1; \\ (3\ 2\ 1), \quad k &= 3, \quad (-1)^3 = -1; \\ (2\ 1\ 3), \quad k &= 1, \quad (-1)^1 = -1; \\ (1\ 3\ 2), \quad k &= 1, \quad (-1)^1 = -1. \end{aligned}$$

Означення визначників 2-го та 3-го порядків можна узагальнити на випадок довільного $n \in \mathbb{N}$.

Означення 2. Визначником n -го порядку називається алгебраїчний вираз з $n!$ (читається "ен-факторіал", $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) членів, кожний з яких є добуток елементів, взятих по одному і тільки одному з кожного рядка і стовпця цього визначника; знак члена визначника дорівнює $(-1)^k$, де k – число інверсій в перестановці з других індексів елементів члена, якщо перші їх індекси є в натуральному порядку $(1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ n)$.

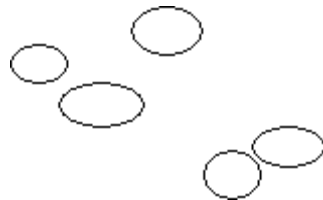
Позначається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Властивості визначників, доведення яких розглянули на прикладі визначників 2-го порядку, аналогічні і для визначників n -го порядку.

Приклад № 11. З'ясувати, членом визначника якого порядку є добуток $a_{13} a_{32} a_{21} a_{45} a_{54}$ та який його знак.

▲ $a_{13} a_{32} a_{21} a_{45} a_{54}$ – член визначника 5-го порядку



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

(1.11)

оскільки він є добуток з п'яти елементів визначника (1.11), взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця цього визначника.

Щоб з'ясувати знак цього члена, перепишемо його елементи у порядку зростання перших індексів: $(-1)^k a_{13} a_{32} a_{21} a_{45} a_{54} = (-1)^k a_{13} a_{21} a_{32} a_{45} a_{54}$. Другі індекси елементів цього члена утворюють перестановку: $(3\ 1\ 2\ 5\ 4)$; вона має три інверсії ($k = 3$). Отже, член $a_{13} a_{32} a_{21} a_{45} a_{54}$ визначника (1.11) має знак мінус: $(-1)^3 = -1$. ▼

Означення 3. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник, який утворюється з даного викресленням i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких розміщений цей елемент.

Наприклад, мінором елемента a_{23} визначника 3-го порядку

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

є визначник 2-го порядку

Означення 4. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

$$\text{Маємо} \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.12)$$

Наприклад,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приклад № 12. Обчислити мінори і алгебраїчні доповнення елементів a_{11} та a_{23} визначника

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\blacktriangle \quad a_{11} = 5, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -11 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 45, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 45,$$

$$a_{23} = -11, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 1. \quad \blacktriangledown$$

1.3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

● **Теорема 1.** Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) – розклад визначника n -го порядку за елементами i -го рядка.

Доведення теореми 1 розглянемо на прикладі визначника 3-го порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}; \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.14)$$

Перетворимо визначник 3-го порядку і користуючись означенням алгебраїчного доповнення, дістанемо (при $i=1$):

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться теорема при $i = 2, 3$. ●

Приклад № 13. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix},$$

розкладаючи його за елементами рядка чи стовпця.

▲ Розкладемо визначник, наприклад, за елементами третього стовпця:

$$\Delta = 25 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 49 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 64 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 25 \times 1 - 49 \times 3 + 64 \times 2 = 6.$$



● **Теорема 2.** Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю: $a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \dots + a_{nk}A_{nj} = 0, j \neq k.$

Доведення. Доведемо теорему на прикладі визначника 3-го порядку.

Розглянемо суму добутків елементів, наприклад, першого рядка на

$\left[\begin{array}{l} \text{за властивістю 2 переставимо між} \\ \text{собою перший та третій стовпці} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{за властивістю 2 переставимо між} \\ \text{собою перший та третій стовпці} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{алгебраїчні} \\ \text{доповнення} \\ \text{елементів третього} \end{array}$

рядка цього визначника. Маємо: $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} =$

$$= a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{12}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad \bullet$$

Приклад № 14. Обчислити визначник, користуючись властивостями та теоремою 1

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

▲ Обчислимо цей визначник, утворюючи нулі в якому-небудь стовпці або рядку.

$x(-1)$
 $x(-2)$

перший рядок додамо до другого; перший помножимо на (-2) і додамо до третього; потім перший помножимо на (-1) і додамо до четвертого; названі дії зобразимо символічно праворуч від визначника; за властивістю 5 накопичуємо нулі в першому стовпці

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

Означення 8. Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо у них співпадають всі розв'язки.

2.1. Формули Крамера

● **Теорема 3.** Якщо визначник Δ системи лінійних рівнянь (1.15) при $m = n$ не дорівнює нулю, то система сумісна і визначена. Розв'язок цієї системи знаходиться за формулами

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.16)$$

Формули (1.16) називаються формулами Крамера, де Δ_j – визначник, який одержуємо з визначника Δ системи заміною стовпця з номером j стовпцем вільних членів.

Доведення. Необхідність. Нехай система (1.15) має розв'язок $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Кожне рівняння системи (1.15) при $m = n$ відповідно помножимо на алгебраїчні доповнення елементів j -го стовпця $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{nj}$.

Маємо

$$\begin{cases} a_{11} \alpha_1 A_{1j} + a_{12} \alpha_2 A_{1j} + \dots + a_{1j} \alpha_j A_{1j} + \dots + a_{1n} \alpha_n A_{1j} = b_1 A_{1j}, \\ a_{21} \alpha_1 A_{2j} + a_{22} \alpha_2 A_{2j} + \dots + a_{2j} \alpha_j A_{2j} + \dots + a_{2n} \alpha_n A_{2j} = b_2 A_{2j}, \\ \dots \\ a_{i1} \alpha_1 A_{ij} + a_{i2} \alpha_2 A_{ij} + \dots + a_{ij} \alpha_j A_{ij} + \dots + a_{in} \alpha_n A_{ij} = b_i A_{ij}, \\ \dots \\ a_{n1} \alpha_1 A_{nj} + a_{n2} \alpha_2 A_{nj} + \dots + a_{nj} \alpha_j A_{nj} + \dots + a_{nn} \alpha_n A_{nj} = b_n A_{nj}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Додамо в системі (1.17) ліві і праві частини, після перетворення дістанемо

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (a_{11} A_{1j} + a_{21} A_{2j} + \dots + a_{i1} A_{ij} + \dots + a_{n1} A_{nj}) + \\ & + \alpha_2 (a_{12} A_{1j} + a_{22} A_{2j} + \dots + a_{i2} A_{ij} + \dots + a_{n2} A_{nj}) + \dots + \\ & + \alpha_j (a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{nj} A_{nj}) + \dots + \\ & + \alpha_n (a_{1n} A_{1j} + a_{2n} A_{2j} + \dots + a_{in} A_{ij} + \dots + a_{nn} A_{nj}) = \\ & = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_i A_{ij} + \dots + b_n A_{nj}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

З рівності (1.18), за теоремою 1, $a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \Delta$, а всі інші вирази в дужках, за теоремою 2, дорівнюють нулю; права частина (1.18) є визначник Δ_j . Тоді рівність (1.18) має вигляд $\alpha_j \times \Delta = \Delta_j$, звідки

$$\alpha_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.19)$$

Достатність. Нехай $\alpha_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, (j = \overline{1, n})$ є розв'язок системи (1.15).

$$\begin{aligned}
& \text{Маємо: } a_{i1} \alpha_1 + a_{i2} \alpha_2 + \dots + a_{ij} \alpha_j + \dots + a_{in} \alpha_n = \\
& = a_{i1} \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{i2} \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} + \dots + a_{in} \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} (a_{i1} \Delta_1 + a_{i2} \Delta_2 + \dots + a_{ij} \Delta_j + \dots + a_{in} \Delta_n) = \\
& = \frac{1}{\Delta} (a_{i1} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_i A_{i1} + \dots + b_n A_{n1}) + \\
& + a_{i2} (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_i A_{i2} + \dots + b_n A_{n2}) + \dots + \\
& + a_{ij} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_i A_{ij} + \dots + b_n A_{nj}) + \dots + \\
& + a_{in} (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_i A_{in} + \dots + b_n A_{nn})) = \\
& = \frac{1}{\Delta} (b_1 (a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{12} + \dots + a_{ij} A_{1j} + \dots + a_{in} A_{1n}) + \dots + \\
& + b_i (a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{in} A_{in}) + \dots + \\
& + b_n (a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \dots + a_{ij} A_{nj} + \dots + a_{in} A_{nn})) = \\
& = \begin{cases} \text{за теоремою 2, множники при} \\ b_k \ (k \neq i) \text{ в дужках дорівнюють} \\ \text{нулю, а за теоремою 1, при} \\ k = i \text{ множник дорівнює } \Delta \end{cases} = \frac{1}{\Delta} b_i \cdot \Delta = b_i, \ i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

●

Приклад № 15. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -15, \\ 2x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases} \quad (1.20)$$

за формулами Крамера.

▲ Обчислимо визначники Δ , Δ_1 та Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -15 & -4 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -75 - (-52) = -23,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -15 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - (-30) = 69.$$

Тоді за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-23}{23} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3.$$

Отже, $\{x_1; x_2\} = \{-1; 3\}$ – єдиний розв'язок системи (1.20). ▼

Приклад № 16. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

▲ Обчислимо визначник Δ даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 45 - 36 + 20 + 36 + 36 = -5.$$

Він відмінний від нуля, отже система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера (1.16). Для цього обчислимо

визначники Δ_1, Δ_2 та Δ_3 , замінюючи у визначнику Δ перший, другий та третій стовпці по черзі стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 27 + 6 - 12 - 36 - 6 = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 36 - 60 + 10 + 36 + 48 = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 24 + 15 + 72 - 40 - 12 - 54 = 5.$$

За формулами Крамера дістанемо

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Таким чином, $\{x; y; z\} = \{1; 2; -1\}$ – єдиний розв’язок заданої системи. ▼

2.2. Дослідження системи лінійних рівнянь

Система (1.15) при $m = n$, $\Delta \neq 0$ зводиться до системи рівнянь $\Delta x_j = \Delta_j$, $j = \overline{1, n}$.

Маємо:

- 1). $\Delta \neq 0$. Система (1.15) при $m = n$ має єдиний розв’язок $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1, n}$.
- 2). $\Delta = 0$, а хоча б один із $\Delta_j \neq 0$. Тоді система несумісна.
- 3). $\Delta = 0$, $\Delta_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$). Система сумісна, невизначена.

Якщо система (1.15) однорідна, то при $m = n$ вона зводиться до рівняння $\Delta \cdot x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$. Можливі випадки:

- 1). $\Delta \neq 0$, тоді однорідна система має нульовий розв’язок.
- 2). $\Delta = 0$, то система сумісна і невизначена.

Приклад № 17. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x - 7,5y = 5. \end{cases}$$

▲ Обчислимо Δ , Δ_1 та Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7,5 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7,5 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, задана система має безліч розв’язків. ▼

Приклад № 18. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 3x - 5y + 5z = 3, \\ 5x - 8y + 6z = 5. \end{cases} \quad (1.21)$$

▲ Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = -60 - 75 - 24 + 25 + 80 + 54 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то система несумісна, або сумісна і невизначена.

Обчислимо визначники Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система (1.21) має безліч розв'язків.

Система (1.21) зводиться до системи двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 3x - 5y + 5z = 3, \end{cases} \quad (1.22)$$

оскільки третє рівняння системи (1.21) є сума перших двох рівнянь.

Визначник з коефіцієнтів при x і y $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,
тоді систему (1.22) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 - z, \\ 3x - 5y = 3 - 5z. \end{cases}$$

За формулами Крамера знайдемо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & -3 \\ 3-5z & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-10 + 5z + 9 - 15z}{-10 + 9} = 10z + 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-z \\ 3 & 3-5z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 10z - 6 + 3z}{-1} = 7z.$$

Отже,

$$\begin{cases} x = 10z + 1, \\ y = 7z, \end{cases} \quad (1.23)$$

де z – довільне значення. Невідома z називається **вільною**, а невідомі x , y – **базисними** невідомими. При будь-яких дійсних значеннях z з (1.23) дістаємо нескінченну множину частинних розв'язків. Рівняння (1.23) називають **загальним** розв'язком системи. Розв'язок називається **базисним**, якщо вільні невідомі дорівнюють нулю. ▼

Приклад № 19. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 6y + z = 4, \\ 3x - 5y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 5. \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -75 + 24 - 3 + 10 - 10 + 54 = 0.$$

▲ Маємо

Оскільки $\Delta = 0$, то система несумісна, або сумісна і невизначена.

Обчислимо $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -60 + 60 - 3 + 25 - 8 + 54 = 68 \neq 0.$$

Отже, одне з рівнянь системи (1.24) зводиться до рівняння $\Delta \times x = \Delta_1$, в якому $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0$, тобто $0 \times x \neq 0$; система несумісна. ▼

Приклад № 20. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

▲ Маємо однорідну систему. Обчислимо Δ :

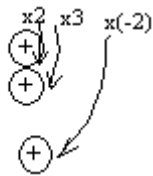
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 2 + 3 + 1 - 2 = -2.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система (1.25) зводиться до рівняння $-2x_j = 0 \quad (j = \overline{1, 3})$, тобто має єдиний тривіальний (нульовий) розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ▼

Приклад № 21. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 16x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 17x_3 + 16x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$$

▲ Маємо однорідну систему. Обчислимо Δ :



$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -10 & 8 \\ 1 & 4 & -5 & 16 \\ -3 & 4 & -17 & 16 \\ 2 & -4 & 14 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 16 \\ -2 & 2 & -10 & 8 \\ -3 & 4 & -17 & 16 \\ 2 & -4 & 14 & -16 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 16 \\ 0 & 10 & -20 & 40 \\ 0 & 16 & -32 & 64 \\ 0 & -12 & 24 & -48 \end{vmatrix} = -10 \cdot 16 \cdot 12 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то задана однорідна система має безліч розв'язків. Вона зводиться до системи двох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 16x_4 = 0, \end{cases}$$

оскільки третє і четверте рівняння є наслідком перших двох рівнянь.

Визначник з коефіцієнтів при x_1, x_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

тоді задану систему запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -5x_3 + 4x_4, \\ x_1 + 4x_2 = 5x_3 - 16x_4. \end{cases}$$

За формулами Крамера знайдемо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \text{де } \Delta = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5x_3 + 4x_4 & -1 \\ 5x_3 - 16x_4 & 4 \end{vmatrix} = -20x_3 + 16x_4 + 5x_3 - 16x_4 = -15x_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5x_3 + 4x_4 \\ 1 & 5x_3 - 16x_4 \end{vmatrix} = 5x_3 - 16x_4 + 5x_3 - 4x_4 = 10x_3 - 20x_4.$$

$$\text{Отже, загальний розв'язок заданої системи: } \begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = 2x_3 - 4x_4, \end{cases}$$

де x_3, x_4 - довільні значення. ▼

[\[1\]](#) Крамер Г. (1704–1752) – швейцарський математик. Основні його праці з вищої алгебри й аналітичної геометрії.

§ 3. МАТРИЦІ І ДІЇ НАД НИМИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

3.1. Матриці і дії над ними. Обернена матриця

Означення 9. **Матрицею** називається прямокутна таблиця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

де a_{ij} , ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) – елементи матриці (індекс i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}).

Означення 10. Матриця, яка має m рядків і n стовпців ($m \neq n$), називається **прямокутною матрицею розміру** $m \times n$ (позначається: $A_{m \times n}$, читається "А ем на ен").

Означення 11. Матриця, в якій $m = n$, називається **квадратною** матрицею n -го порядку.

Означення 12. Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо її елементи $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ij} \neq 0$, $i = j$.

Означення 13. Діагональна матриця, у якій всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, називається **одиничною** матрицею (позначається E):

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 14. Матриця розміру $1 \times n$ називається **матрицею – рядком**. Наприклад, $D_{1 \times 5} = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$ – матриця–рядок.

Означення 15. Матриця розміру $m \times 1$ називається **матрицею–стовпцем**.

$$M_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Наприклад, матриця є матрицею–стовпцем.

Означення 16. **Нульовою** матрицею називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (позначається O).

Наприклад, нульовою матрицею розміру 3×3 є матриця

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

вигляду

При означенні рівності матриць та дій над ними, будемо їх позначати великими буквами $A, B, C, \dots$ а їх елементи – відповідно малими буквами $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$.

Означення 17. Дві матриці A і B одного розміру називаються **рівними** (позначається $A=B$), якщо рівні їх відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

3.1.1. Дії над матрицями

Означення 18. Сумою (різницею) двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$ ($C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$), елементи c_{ij} якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} , b_{ij} матриць $A_{m \times n}$ та $B_{m \times n}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Наприклад, якщо задано матриці

$$A = A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{тоді}$$

$$C_{3 \times 3} = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}.$$

Приклад № 22. Знайти суму матриць

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\blacktriangle A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+3 \\ -2+4 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \blacktriangledown$$

Зазначимо, що дія додавання (віднімання) для матриць різного розміру не має змісту.

Означення 19. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ на число α (позначається $A\alpha = \alpha A = C$) називається матриця C , елементи якої дорівнюють добуткам усіх елементів a_{ij} матриці $A_{m \times n}$ на число α : $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Наприклад, якщо матриця $A = A_{3 \times 3}$, то

$$A\alpha = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Приклад № 23. Задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $3 \times A$.

$$\blacktriangle \quad 3 \times A = 3 \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 & 3 \times 3 \\ 1 \times 3 & 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 24. Знайти матрицю $3 \times A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\blacktriangle \quad 3 \times A + B = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown$$

Означення 20. **Добутком** матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ на матрицю $B_{n \times k}$ називається матриця $C_{m \times k}$ (позначається: $C_{m \times k} = A_{m \times n} \times B_{n \times k}$), елементи якої c_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, k}$) дорівнюють сумам добутоків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}; \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

Взагалі, добуток $AB \neq BA$. Зокрема, якщо $AB = BA$, то матриці A і B **комутативні**.

● **Теорема 4** (без доведення). Якщо A і B – дві квадратні матриці одного розміру з визначниками $|A|$ і $|B|$, то визначник матриці AB дорівнює добутку визначників матриць, що перемножуються:

$$|AB| = |A| |B|. \quad (1.28)$$

Приклад № 25. Знайти: 1) добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} & 2) f(A), \text{ якщо } f(x) = 2x^2 - 3x + 4, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \\ \blacktriangle \quad 1) \quad & AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2(-3) + 1 \times (-1) \\ -3 \times 2 + 4 \times 0 & -3(-3) + 4(-1) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad AB \neq BA, \quad |AB| = -22, \quad |A| = 11, \\ & |B| = -2, \quad |AB| = |A||B| \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} f(A) &= 2 \cdot A^2 - 3A + 4E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -36 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -27 & 18 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Приклад № 26. Задано матриці

$$A_{5 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток цих матриць.

$$\begin{aligned} C_{5 \times 3} &= A_{5 \times 4} \times B_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &\quad \blacktriangle \\ &= \begin{pmatrix} 3+2+1+1 & 6+1+1+1 & 3+1+1+2 \\ 1+6+1+1 & 2+3+1+1 & 1+3+1+2 \\ 1+2+3+1 & 2+1+3+1 & 1+1+3+2 \\ 1+2+1+3 & 2+1+1+3 & 1+1+1+6 \\ 1+2+1+1 & 2+1+1+1 & 1+1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 9 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

З означення добутку матриць, зокрема, випливає:

- 1) добуток матриці-рядка $A_{1 \times m}$ на матрицю-стовпець $B_{m \times 1}$ є матриця $C_{1 \times 1}$:

$$C_{1 \times 1} = A_{1 \times m} \times B_{m \times 1} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1}).$$

Властивості дій додавання і множення матриць:

- 1). **Комутативність** відносно додавання матриць:

$$A + B = B + A.$$

- 2). **Дистрибутивність**

відносно додавання чисел при множенні їх на матрицю:

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A,$$

відносно додавання матриць :

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

відносно множення матриць:

$$(A+B)C = AC + BC, \\ C(A+B) = CA + CB.$$

3). **Асоціативність** відносно додавання матриць:

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

відносно множення матриці на число :

$$(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha (AB),$$

відносно множення чисел :

$$(\alpha \beta) A = \alpha (\beta A),$$

відносно множення матриць :

$$(AB)C = A(BC).$$

$$4). \quad A + O = A; \quad A - A = O; \quad AE = EA = A$$

Означення 21. **Оберненою** матрицею до матриці A називається така матриця A^{-1} , для якої виконуються рівності:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E,$$

де E – одинична матриця.

Визначник одиничної матриці дорівнює одиниці:

$$\det E = |E| = 1.$$

Означення 22. Квадратна матриця $A_{n \times n}$ називається **виродженою**, якщо її визначник дорівнює нулю ($|A| = 0$) **інєвиродженою**, якщо $|A| \neq 0$.

• **Теорема 5.** Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю A^{-1} , необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

Доведення. Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$. За теоремою 4 матимемо $|A \times A^{-1}| = |A| |A^{-1}| = |E| = 1$, тому $|A| \neq 0$.

Достатність. Нехай тепер $|A| \neq 0$. Доведемо, що матриця A має обернену матрицю A^{-1} . Нехай A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} визначника матриці (1.26) при $m = n$.

Побудуємо матрицю H таким чином: кожний елемент матриці A замінімо його алгебраїчним доповненням, поділеним на визначник матриці A :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \dots & \frac{A_{1n}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{2n}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Поміняємо місцями в матриці H її рядки і стовпці, дістанемо матрицю H^T (H^T – транспонована матриця до матриці H). Маємо

$$H^T = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & \dots & A_{n1}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & \dots & A_{n2}/|A| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/|A| & A_{2n}/|A| & \dots & A_{nn}/|A| \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриці A та H^T :

$$\begin{aligned} A \times H^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & \dots & A_{n1}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & \dots & A_{n2}/|A| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/|A| & A_{2n}/|A| & \dots & A_{nn}/|A| \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

З теорем 1, 2 випливає, що матриця в правій частині рівності (1.29) єдинична. Отже, $A \times H^T = E$, звідки $H^T = A^{-1}$. Тому

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Доведемо єдиність матриці A^{-1} , оберненої до матриці A . Нехай існує інша обернена матриця, наприклад, D . Тоді, за означенням $DA = AD = E$. За асоціативною властивістю добутку матриць $DAA^{-1} = D(AA^{-1}) = DE = D$, або $DAA^{-1} = (DA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$, звідки $D = A^{-1}$.

Отже, якщо $|A| \neq 0$, то існує єдина обернена матриця до матриці A (вироджена матриця не має оберненої матриці). ●

Приклад № 27. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

▲ 1). Обчислимо визначник матриці A :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 28 + 30 + 10 + 21 + 8 = 95 \neq 0.$$

2). Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 - 15) = 19, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 38, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6.$$

3). Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} -19 & 19 & 38 \\ 9 & -4 & 17 \\ 8 & 7 & -6 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

4). Зробимо перевірку:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{95} \begin{pmatrix} -19 & 19 & 38 \\ 9 & -4 & 17 \\ 8 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 95 & 0 & 0 \\ 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \times A &= \frac{1}{95} \begin{pmatrix} -19 & 19 & 38 \\ 9 & -4 & 17 \\ 8 & 7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 95 & 0 & 0 \\ 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Отже, за означенням: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$, тобто матриця (1.31) – обернена до матриці A . ▼

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад № 28. Знайти обернену матрицю до матриці методом елементарних перетворень (поняття див. на с. 37).

▲ Утворимо прямокутну матрицю $(A|E)$, дописуючи справа до A одиничну матрицю E . Використовуючи елементарні перетворення над рядками, приведемо матрицю $(A|E)$ до виду $(E|A^{-1})$, де A^{-1} – обернена до A матриця:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right| x(-2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Отже, $\blacktriangledown$

3.2. Розв'язування сумісних систем n лінійних рівнянь з n невідомими матричним методом

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.32)$$

Позначимо матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Тоді, за правилом множення матриць, система (1.32) зводиться до матричного рівняння

$$AX = B. \quad (1.33)$$

Нехай A – невироджена матриця. Тоді існує обернена матриця A^{-1} . Помножимо обидві частини рівняння (1.33) зліва на A^{-1} , дістанемо $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Це є матричний розв'язок системи (1.33).

Приклад № 29. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -13 \end{cases} \quad (1.35)$$

матричним методом.

▲ 1). Запишемо матричне рівняння системи (1.35): $AX = B$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

2). У прикладі №27 для матриці A системи (1.35) знайдена матриця A^{-1} , що має вигляд (1.31).

3). Матричний розв'язок системи (1.35) знаходимо за рівністю (1.34):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} -19 & 19 & 38 \\ 9 & -4 & 17 \\ 8 & 7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32/5 \\ -207/95 \\ 6/95 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

З рівності матриць (1.36) дістанемо розв'язок системи (1.35)

$$\{x_1; x_2; x_3\} = \left\{-32/5; -207/95; 6/95\right\}. \quad \blacktriangledown$$

Зауваження. 1. Матричним способом розв'язуємо тільки сумісні системи рівнянь, що мають невивроджені матриці.

2. Розв'язок рівняння $X \cdot A = B$ знаходиться за формулою $X = B \cdot A^{-1}$.

3. Рівняння $A \cdot X \cdot B = C$ має розв'язок $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Приклад № 30. Матричним методом розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases} \quad (1.37)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

▲ 1). Позначимо

Система (1.37) запишеться в матричному вигляді: $AX = B$.

2). Обчислимо: $\Delta = |A| = 1 \neq 0$;

$$A_{11} = 2; \quad A_{12} = -4; \quad A_{13} = 2; \quad A_{14} = 1; \quad A_{31} = -1; \quad A_{32} = 5; \quad A_{33} = -3; \quad A_{34} = -1;$$

$$A_{21} = 0; \quad A_{22} = -3; \quad A_{23} = 2; \quad A_{24} = 1; \quad A_{41} = 0; \quad A_{42} = 2; \quad A_{43} = -1; \quad A_{44} = -1.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо

3). Матричний розв'язок системи (1.37) знаходимо за рівністю (1.34):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

З рівності матриць (1.38) дістаємо розв'язок системи (1.37):

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\} = \{1; 2; 1; -1\}. \blacktriangledown$$

3.3. Ранг матриці

Нехай задана матриця (1.26) розміру $m \times n$: $A = A_{m \times n}$.

Означення 23. Мінором k -го порядку матриці $A_{m \times n}$ називається визначник квадратної матриці, елементами якої є елементи матриці $A_{m \times n}$, що розміщені на перетині вибраних довільно k рядків і k стовпців

Наприклад, якщо виділити в матриці A будь-які три рядки (нехай 1-й, i -й та j -й), і три стовпці (нехай 2-й, i -й та j -й), то на перетині названих рядків і стовпців дістанемо дев'ять елементів, які в цій матриці обведені кружками:

$$A_{m \times n} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{1i} & a_{1j} \\ a_{i2} & a_{ii} & a_{ij} \\ a_{j2} & a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}.$$

що утворюють визначник 3-го порядку

Цей визначник називається **мінором 3-го порядку** матриці $A_{m \times n}$.

Наприклад, для матриці

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

можна побудувати мінори другого та третього порядку

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \text{ та інші;}$$

$$\Delta_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{123}^{234} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Тут в позначеннях, наприклад, $\Delta_{1,2,3}^{1,2,4}$ нижні індекси є номери рядків, а верхні – номери стовпців матриці.

Елементи матриці $A_{m \times n}$ є мінорами першого порядку.

Означення 24. Рангом матриці $A_{m \times n}$ (позначається $r(A)$, або $\text{rang } A$) називається найбільший з порядків її мінорів, що не дорівнюють нулю.

Той мінор r -го порядку, який відмінний від нуля, називається **базисним мінором** (у матриці A може бути декілька базисних мінорів).

Якщо $r(A) = k$, то матриця A має хоча б один відмінний від нуля мінор порядку k , а будь-який мінор порядку, більшого за k , дорівнює нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад № 31. Знайти ранг матриці

▲ Обчислимо мінор четвертого порядку. Він єдиний і дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо один з мінорів третього порядку:

$$\Delta_{1,2,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8 \neq 0.$$

За означенням, $r(A) = 3$. ▼

Для знаходження рангу матриці великого розміру $m \times n$ доводиться обчислювати багато її мінорів. Обчислення рангу матриці спрощується за допомогою таких **елементарних перетворень** матриці:

- 1) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на одне й те саме число, відмінне від нуля;
- 2) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те саме число;
- 3) перестановка місцями рядків (стовпців) матриці.

● **Теорема 6.** Елементарні перетворення над матрицею не змінюють її рангу.

Доведення. 1. При множенні рядка (стовпця) на число $\alpha \neq 0$ базисний мінор або не зміниться (якщо він дорівнює нулю), або помножиться на α (за властивістю 3 визначника). Жодний мінор, що дорівнює нулю, не стане відмінним від нуля.

2. Якщо всі мінори $(k+1)$ -го порядку дорівнюють нулю, то при додаванні рядків (стовпців) жодний з них не стане відмінним від нуля. Дійсно, якщо до деякого рядка мінора $(k+1)$ -го порядку, який дорівнює нулю, додати рядок, що до нього не належить, дістанемо мінор, який дорівнює алгебраїчній сумі двох мінорів $(k+1)$ -го порядку заданої матриці, які дорівнюють нулю. Якщо ж до рядка, що входить до мінора $(k+1)$ -го порядку, який дорівнює нулю, додати інший рядок, що належить до нього, то дістанемо мінор, який дорівнює сумі мінора $(k+1)$ -го порядку (що дорівнює нулю) і визначника матриці з двома однаковими рядками. Звідси випливає, що ранг матриці не збільшиться. Він не може зменшитися.

3. Якщо переставити рядки (стовпці) мінора, що входять до нього, то мінор змінить знак. Якщо ж мінор містить тільки один із переставлених рядків матриці, то він може змінитися на мінор, який не більше ніж знаком відрізняється від іншого мінора тієї ж матриці, або взагалі не зміниться. При цьому порядок базисного мінора залишиться тим самим.

Означення 25. Матриці A і $\bar{A}$, які мають однакові ранги, називаються *еквівалентними* і позначаються $A \sim \bar{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад № 32. Знайти ранг матриці

▲ Використовуючи елементарні перетворення для обчислення рангу заданої матриці, матимемо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} &\sim \left[\begin{array}{l} \text{від елементів третього} \\ \text{рядка віднімемо від -} \\ \text{повідні елементи пер-} \\ \text{шого, помножені на 2} \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim [\text{поділимо елементи третього стовпця на 2}] \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{віднімемо від елементів четвертого} \\ \text{стовпця відповідно потроєні елементи} \\ \text{третього, а від елементів другого} \\ \text{стовпця віднімемо відповідні елементи} \\ \text{третього, і від елементів першого віднімемо} \\ \text{відповідні елементи другого, помножені на 2} \end{array} \right] \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{додамо до елементів} \\ \text{третього рядка} \\ \text{другий, помножений} \\ \text{на 3} \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \end{aligned}$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{скоротимо} \\ \text{четвертий стовпець} \\ \text{на 2, а перший -} \\ \text{на 3,} \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{Віднімемо від} \\ \text{першого четвертий} \\ \text{стовпець і додамо} \\ \text{до другого четвертий} \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, ранг матриці $r(A) = 2$. ▼

Для обчислення рангу матриць користуються ще так званим методом обвідних мінорів; розглянемо його на прикладі.

Приклад № 33. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

▲ Обчислимо мінор 2-го порядку, наприклад,

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Мінори

$$\Delta_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -10 \end{vmatrix}$$

є обвідними для обчисленого мінора 2-го порядку. Обчислимо їх:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки всі обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$. ▼

3.4. Дослідження сумісності системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь (1.15). Крім матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

системи (1.15), будемо матрицю вигляду

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

яка називається **розширеною** матрицею цієї системи. Матриця $\bar{A}$ утворена з елементів основної матриці A і стовпця вільних членів.

Теорема Кронекера-Капеллі^[1] (без доведення). Система лінійних рівнянь (1.15) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$: $r(A) = r(\bar{A})$.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих ($r = n$), то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих ($r < n$), то система має безліч розв'язків.

Елементарні перетворення над матрицями A і $\bar{A}$ для визначення рангів матриць виконуємо тільки над матрицею $\bar{A}$, в якій елементи стовпця з вільних членів системи відокремлюємо вертикальною рисою від основної матриці A .

Приклад № 34. Дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0,5. \end{cases}$$

▲ Дослідимо сумісність системи за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -0,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1,5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$ (4 – число невідомих системи). Отже, система сумісна і має безліч розв'язків. ▼

Приклад № 35. Дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

▲ Основна і розширена матриці системи мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо їх ранги безпосередньо обчисленням мінорів. Маємо $\Delta = |A| = 256 - 18 + 6 - 216 + 4 - 32 = 0$.

Оскільки $\Delta = 0$, а мінор 2-го порядку матриці A

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 4 = 28 \neq 0,$$

то $r(A) = 2$.

Обчислимо мінори 3-го порядку матриці $\bar{A}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 128 - 2 - 128 = -234 \neq 0,$$

то $r(\bar{A}) = 3$.

Отже, задана система несумісна, оскільки $r(A) \neq r(\bar{A})$. ▼

3.5. Однорідна система лінійних рівнянь

Однорідна система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

завжди сумісна, оскільки ранг основної матриці цієї системи дорівнює рангу розширеної матриці (розширена матриця відрізняється від основної матриці стовпцем із нульових членів, а приєднання нульового стовпця вільних членів за елементарними перетвореннями матриць не змінює рангу матриці). Вона має нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, який перетворює кожне рівняння системи (1.39) в тотожність. Отже, система (1.39) сумісна. Єдиність чи невизначеність розв'язку досліджується за теоремою Кронекера-Капеллі:

1) якщо ранг основної матриці $r(A) = r$ дорівнює числу невідомих ($r = n$), то система має єдиний (нульовий) розв'язок;

2) якщо $r < n$, то однорідна система невизначена (крім нульового, вона має безліч ненульових розв'язків). В цьому випадку вибирають r "базисних" (за "**базисні**" **невідомі** системи вибирають ті, коефіцієнти яких утворюють визначник, що не дорівнює нулю) і $n - r$ "**вільних**" **невідомих**. Через "вільні" невідомі виражають **загальний розв'язок системи**.

Розглянемо властивості розв'язків однорідної системи.

Теорема 7. Якщо стовпці x_1 і x_2 - розв'язки однорідної системи (1.39), то їх сума $x_1 + x_2$ - також розв'язок цієї системи. Добуток розв'язку однорідної системи на будь-яке число λ ($\lambda \in R$), тобто λx_1 є розв'язком тієї ж системи.

Теорема 8. Якщо ранг матриці однорідної системи дорівнює r , то система має $n - r$ розв'язків, які задовольняють умовам : 1) вони лінійно незалежні, 2) будь-який розв'язок однорідної системи можна подати у вигляді лінійної комбінації цих $n - r$ розв'язків.

Приклад № 36. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

▲ Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 3 - 2 + 18 - 2 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то система (1.40) невизначена. Мінор 2-го порядку, наприклад,

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Оскільки мінор 3-го порядку дорівнює нулю, а мінор 2-го порядку не дорівнює нулю, то $r = 2 < n = 3$. Система (1.40) зводиться до системи

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему через базисні невідомі

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_3, \\ x_1 + 2x_2 = -3x_3. \end{cases} \quad (1.41)$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то за формулами Крамера знайдемо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & -1 \\ -3x_3 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-2x_3 - 3x_3}{5} = \frac{-5x_3}{5} = -x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -x_3 \\ 1 & -3x_3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-6x_3 + x_3}{5} = \frac{-5x_3}{5} = -x_3.$$

Покладемо $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$), дістанемо, що всі ненульові розв'язки системи (1.41) можна записати у вигляді $x_1 = -t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$. ▼

Приклад № 37. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

▲ Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то система (1.42) невизначена. Обчислимо мінори 3-го порядку:

$$\Delta_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Мінор 2-го порядку, наприклад,

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Оскільки мінор 4-го порядку і всі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, а мінор 2-го порядку не дорівнює нулю, то $r = 2 < n = 4$. Система (1.42) зводиться до системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему через базисні невідомі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 - 4x_4, \\ 2x_1 + 3x_2 = -7x_3 - 10x_4. \end{cases} \quad (1.43)$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то за формулами Крамера знайдемо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -3x_3 - 4x_4 & 2 \\ -7x_3 - 10x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -5x_3 - 8x_4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3x_3 - 4x_4 \\ 2 & -7x_3 - 10x_4 \end{vmatrix}}{-1} = x_3 + 2x_4.$$

Покладемо $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), дістанемо, що всі ненульові розв'язки системи (1.43) можна записати у вигляді $x_1 = -5\alpha - 8\beta$, $x_2 = \alpha + 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. ▼

Приклад № 38. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 3 + 8 + 1 + 12 - 10 = 3 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система (1.44) має єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ▼

^[1] Капеллі А. (1855-1910) - італійський математик;
Кронекер Л. (1823-1891) - німецький математик.

§ 4. МЕТОД ГАУССА¹ І ЖОРДАНА²-ГАУССА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З БАГАТЬМА НЕВІДОМИМИ

Існує ефективний метод розв'язування систем лінійних рівнянь, який називається методом Гаусса.

Ідея методу полягає в тому, що система лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих перетворюється в еквівалентну їй систему такого вигляду, яка легко досліджується і розв'язується. Методом Гаусса можна розв'язувати загальну систему лінійних рівнянь. Алгоритм розв'язування системи методом Гаусса полягає в наступних перетвореннях:

1) додавання до обох частин одного рівняння системи відповідних частин іншого рівняння тієї ж системи, помножених на деяке число λ .

За допомогою таких перетворень виключаємо одну з невідомих, наприклад x_1 , із усіх рівнянь, залишаючи її в одному рівнянні, наприклад, в першому. Для цього досить підібрати відповідне значення λ для кожного рівняння, з якого вибрана невідома x_1 виключається.

2) виключення рівнянь вигляду $0 = 0$ з заданої системи на підставі наступного твердження.

● **Теорема 9.** Якщо серед рівнянь системи (1.15) є рівняння вигляду

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + \dots + 0 \times x_n = 0, \quad (1.45)$$

Сукупність значень $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ буде єдиним розв'язком системи (1.49), а тому, і системи (1.15).

Система (1.50) містить r рівнянь ($r \leq m, \quad r \leq n$). Якщо $r = n$, то система визначена і матиме вигляд (1.49), а при $r < n$ - невизначена.

Перенесемо в кожному із рівнянь системи (1.50) члени з невідомими $x_{i+1}, \dots, x_n$ в праву частину, дістанемо систему вигляду

[illegible]

Невідомі $x_1, \dots, x_r$ називаються "*базисними*", а невідомі $x_{r+1}, \dots, x_n$ — "*вільними*". Система (1.51) має безліч розв'язків, оскільки, надаючи довільних значень вільним невідомим, а їх можна вибрати нескінченним числом способів, діставатимемо безліч *частинних* розв'язків.

Приклад № 39. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad (1.52)$$

▲ Перетворимо задану систему в еквівалентну їй так, щоб змінна x_1 в першому рівнянні мала коефіцієнтом одиницю, а в інших рівняннях вона не містилась би зовсім. Для цього переставимо між собою перше і друге рівняння, потім перше рівняння системи помножимо на (-2) і почленно додамо його до другого, аналогічно помножимо третє рівняння на (-1) і додамо його до першого, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Тепер аналогічно виключимо невідоме x_2 із третього рівняння, маємо

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_2 - x_3 = -5, \\ -5x_3 = -13. \end{cases}$$

Поділимо обидві частини третього рівняння на (-5) , а другого – на 3:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{5}{3}, \\ x_3 = \frac{13}{5}. \end{cases}$$

Дістанемо систему, в якій коефіцієнти на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а коефіцієнти зліва від діагоналі – дорівнюють нулю. Така система

називається *трикутною*. Із останнього рівняння знаходимо, що $x_3 = 2,6$.

Підставимо значення x_3 в друге рівняння, потім в перше,

дістанемо $x_1 = x_2 - 2,6 + 2$, $x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2,6}{3}$, звідки $x_1 = x_2 - 0,6$; $x_2 = -0,8$; $x_3 = 2,6$.

Підставимо в перше рівняння значення x_2 , знайдемо $x_1 = -1,4$; $x_2 = -0,8$; $x_3 = 2,6$.

Отже, система має єдиний розв'язок:

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{-1,4, -0,8, 2,6\}. \blacktriangledown$$

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручно записувати систему у вигляді матриці, яка складена з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів (покажемо це на попередньому прикладі):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Над цією матрицею можна виконувати елементарні перетворення. При виконанні таких перетворень, дістанемо еквівалентні матриці:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & -1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & -5/6 & -13/6 \end{pmatrix} \xleftarrow{\times(-6/5)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 13/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результаті елементарних перетворень дістанемо трикутну матрицю, якій відповідає система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{5}{3}, \\ x_3 = \frac{13}{5}. \end{cases}$$

З цієї системи дістанемо розв'язок $\{x_1, x_2, x_3\} = \{-1,4, -0,8, 2,6\}$.

Крім методу Гаусса, існує метод Жордана-Гаусса (метод повного виключення невідомих).

Метод Жордана-Гаусса можна використовувати для систем з довільним числом рівнянь.

Розглянемо систему (1.15). Запишемо її у вигляді табл.1.

	c_{22}					
...	...	...	...	...	...	...
0	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	b'_i
...	...	...	...	...	...	...
0	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	b'_m

Далі поділимо коефіцієнти другого рівняння системи (1.54) на розв'язувальний елемент $c_{22} \neq 0$, дістанемо рівняння

$$x_2 + c'_{23}x_3 + \dots + c'_{2j}x_j + \dots + c'_{2n}x_n = b''_2, \quad (1.55)$$

де

$$c'_{2l} = \frac{c_{2l}}{c_{22}}, \quad b''_2 = \frac{b'_2}{c_{22}}, \quad (l = \overline{3, n})$$

Виключимо тепер x_2 аналогічно тому, як виключили x_1 , прийдемо до наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + c'_{13}x_3 + \dots + c'_{1j}x_j + \dots + c'_{1n}x_n = b''_1, \\ x_2 + c'_{23}x_3 + \dots + c'_{2j}x_j + \dots + c'_{2n}x_n = b''_2, \\ c'_{33}x_3 + \dots + c'_{3j}x_j + \dots + c'_{3n}x_n = b''_3, \\ \dots \\ c'_{i3}x_3 + \dots + c'_{ij}x_j + \dots + c'_{in}x_n = b''_i, \\ \dots \\ c'_{m3}x_3 + \dots + c'_{mj}x_j + \dots + c'_{mn}x_n = b''_m, \end{cases} \quad (1.56)$$

де

$$c'_{kl} = \frac{c_{kl}c_{22} - c_{k2}c_{2l}}{c_{22}}, \quad b''_k = \frac{c_{22}b'_k - c_{k2}b'_2}{c_{22}}, \\ (k = \overline{1, m}, \quad k \neq 2, \quad l = \overline{1, n}, \quad l \neq 2)$$

і т.ін.

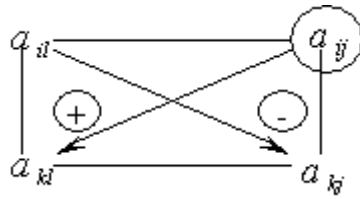
Так послідовно виконуються всі наступні кроки перетворень Жордана-Гаусса.

Алгоритм кроку перетворень Жордана-Гаусса:

- 1) вибираємо "розв'язувальний" елемент $a_{ij} \neq 0$;
- 2) елементи i -го "розв'язувального" рядка табл.1 ділимо на "розв'язувальний" елемент і одержані частки записуємо до табл.2;
- 3) всі елементи j -го стовпця табл.2 дорівнюють нулю, крім елемента, що стоїть на місці "розв'язувального", він дорівнює одиниці;
- 4) всі інші елементи табл.2 обчислюють за формулами

$$c_{kl} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{li}}{a_{ij}}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (k \neq i), \quad l = \overline{1, n} \quad (l \neq j)$$

Для обчислення c_{kl} використовують наступну схему прямокутника



Зауваження:

1) за "розв'язувальний" елемент зручніше вибирати 1, тоді i -ий рядок із табл.1 переписється без змін в табл.2, а коефіцієнти c_{kl} обчислюватимуться за формулами

$$c_{kl} = a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il};$$

2) якщо $a_{kj} = 0$ (це елемент стовпця, який містить "розв'язувальний" елемент), то $c_{kl} = a_{kl}$, тобто рядок з номером k із табл.1 в табл.2 переписється без змін;

3) якщо $a_{il} = 0$ (це рядок, який містить "розв'язувальний" елемент), то $c_{kl} = a_{kl}$, тобто стовпець з номером l із табл.1 в табл.2 переписується без змін;

4) якщо в таблиці є два пропорційні рядки, то один з них можна викреслити.

Щоб бути впевненим у правильності розрахунків, які проводяться на кожному кроці перетворень Жордана-Гаусса, виконуємо контроль за обчисленнями.

Контроль за обчисленнями (к). Нехай в табл.1 $a_{ij} \neq 0$ ($a_{11} \neq 0$) – "розв'язувальний" елемент. Позначимо суми елементів рядків табл.1:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1j} + \dots + a_{1n} + b_1, \\ \alpha_2 &= a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2j} + \dots + a_{2n} + b_2, \\ &\vdots \\ \alpha_m &= a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mj} + \dots + a_{mn} + b_m. \end{aligned}$$

Взагалі,

$$\alpha_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ij} + \dots + a_{in} + b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тоді в табл.2

$$\beta_k = c_{k1} + c_{k2} + \dots + c_{kj} + \dots + c_{kn} + b'_k, \quad k = \overline{1, m} \quad (k \neq i)$$

обчислюємо за формулою

$$\beta_k = \frac{\alpha_k a_{ij} - a_{kj} \alpha_i}{a_{ij}}. \quad (1.57)$$

Нехай над системою (1.15) виконано максимальне число r кроків перетворень Жордана-Гаусса і r -й крок перетворень системи записано до табл.3.

x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_n	b_i^*
1	0	$\dots$	0	d_{1r+1}	$\dots$	d_{1n}	b_1^*
0	1	$\dots$	0	d_{2r+1}	$\dots$	d_{2n}	b_2^*
.	.	$\dots$	.	.	$\dots$	.	.
0	0	$\dots$	1	d_{rr+1}	$\dots$	d_{rn}	b_r^*

1) якщо число рядків і стовпців в табл.3 однакове ($r=n$), то система має єдиний розв'язок.

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1^* - d_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - d_{1n}x_n, \\x_2 &= b_2^* - d_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - d_{2n}x_n, \\&\vdots \\x_r &= b_r^* - d_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - d_{rn}x_n.\end{aligned}$$

3) якщо після перетворень системи одержимо рівняння, в якому всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків не має, тобто **несумісна**.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

- ▲ 1. Вибираємо "розв'язувальний" елемент $a_{11} = 1$ (табл.4);
 2. Коефіцієнти першого "розв'язувального" рядка ділимо на 1, тобто переписуємо в табл.5 без змін;

3. В першому стовпчику табл.5, $c_{11} = 1$ а решта елементів – нулі;

4. Елементи c_{ij} табл.5 обчислюємо за схемою прямокутника:

$$c_{22} = 1(-1) - 1 \times 1 = -2, \quad c_{23} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1,$$

$$c_{32} = 1 \times 3 - 2 \times 1 = 1, \quad c_{33} = 1 \times (-1) - 2 \times 1 = -3,$$

$$b'_2 = 1(-7) - 1(-2) = -5, \quad b'_3 = 1 \times 1 - 2(-2) = 5.$$

Аналогічно переходимо від табл.5 до табл.6 і від неї до табл.7.

x_1	x_2	x_3	b_i	k
1	1	1	-2	1
1	-1	2	-7	-5
1	3	-1	1	5
2				

Таблиця 4

1	1	1	-2	1
0	-2	1	-5	-6
0	1	-3	5	3
0				

Таблиця 5

1	0	4	-7	-2
0	0	-5	5	0
0	1	-3	5	3
0				

Таблиця 6

1	0	0	-3	-2
0	0	1	-1	0
0	1	0	2	3

Таблиця 7

Записуючи табл.7 у вигляді системи, дістанемо

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Отже, єдиний розв'язок системи $\{x_1, x_2, x_3\} = \{-3; 2; -1\}$. ▼

Приклад № 41 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 7. \end{cases}$$

▲ Маємо табл.8.

Таблиця 8

x_1	x_2	x_3	θ_i	k
1	-1	-1	5	4
2	1	3	3	9
1	-4	-6	7	-2
1	-1	-1	5	4
0	3	5	-7	1
0	-3	-5	2	-6
1	0	2/3	8/3	13/3
0	1	5/3	-7/3	1/3
0	0	0	-5	-5

Система несумісна, тому що рівнянню

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 = -5$$

не задовольняють ніякі значення x_1, x_2, x_3 . ▼

Приклад № 42. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

▲ Маємо табл.9.

Таблиця 9

x_1	x_2	x_3	θ_i	k
2	1	-1	5	7
	-2	2	-5	-4
	1	-1	10	17
1				
7				
0	5	-5	15	15
1	-2	2	-5	-4
0	15	-15	45	45
0	1	-1	3	3
1	0	0	1	2
0	0	0	0	0

Система має безліч розв'язків. Її загальний розв'язок $x_1 = 1, x_2 = x_3 + 3$. Якщо $x_3 = 0$, маємо $x_2 = 3, x_1 = 1$, тобто $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1; 3; 0\}$ – невід'ємний базисний розв'язок. ▼

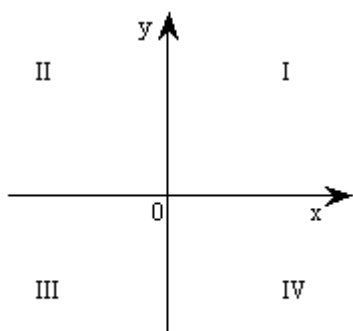


Рис. 5

¹ Гаусс К.Ф. (1777–1855) – німецький математик

² Жордан К.М.Е. (1838-1922) – французький математик

§ 5. ВЕКТОРИ І ЛІНІЙНІ ДІЇ НАД НИМИ. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

5.1. Прямокутні координати на площині і в просторі

Означення 26. Пряма лінія, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю масштабу, називається **числовою віссю** (позначається: OX , де O – початок відліку (рис.4).

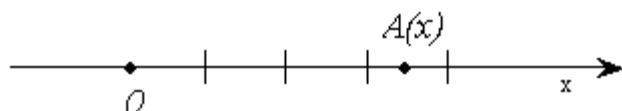


Рис. 4

За геометричною інтерпретацією повноти дійсних чисел, між точками числової осі і дійсними числами існує взаємно однозначна відповідність. Точці O осі OX відповідає число нуль. Точкам числової осі в напрямі осі відповідають додатні числа, а точкам в протилежному напрямі осі від точки O – від'ємні числа. Числа, які відповідають точкам числової осі, (позначається $A(x)$), називаються її **координатами**.

Означення 27. **Системою прямокутних координат** на площині^[1] називають дві взаємно перпендикулярні осі (осі координат) з спільною точкою відліку (початком координат). Горизонтальна числова вісь OX називається **віссю абсцис**, а вертикальна OY – **віссю ординат**.

Систему координат позначаємо XOY (рис.5).

Орієнтація системи координат на площині називається **правою (лівою)**, якщо будь-який промінь з вершиною в початку координат обертається від осі OX до осі OY проти руху годинникової стрілки (за рухом годинникової стрілки) на кут φ , де $0 < \varphi < \pi$. В посібнику будемо користуватись правою орієнтацією системи координат.

За геометричною інтерпретацією повноти дійсних чисел для осей координат OX і OY впливає, що між точками площини системи

координат XOY і парами упорядкованих дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність.

Означення 28. Упорядковану пару дійсних чисел (позначається (x, y)), що взаємно однозначно відповідає точці M площини системи координат (позначається $M(x, y)$), називають **координатами точки**.

Числа x і y – координати точки відповідно називаються **абсцисою** і **ординатою**.

Геометричні координати x і y точки $M(x, y)$ є числа, що відповідають точкам, які є проєкціями точки $M(x, y)$ на осі OX і OY (позначається: $\text{пр}_{OX}M = M_1(x)$, $\text{пр}_{OY}M = M_2(y)$) (рис.6).

Оскільки x і y – координати точки M є відповідні координати числових осей OX і OY , то їх знаки визначаються за означенням знаку координат точки числової осі. Система координат XOY поділяє площину на чотири чверті (рис.5). Абсциса x в I, IV (II, III) чвертях додатна (від’ємна). Ордината y в I, II (III, IV) чвертях додатна (від’ємна).

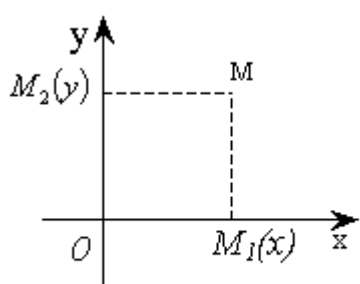


Рис. 6

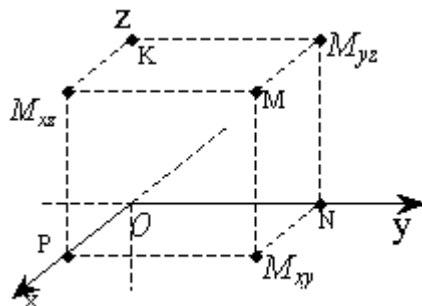


Рис. 7

Означення 29. Системою прямокутних координат у

просторі (позначається $OXYZ$) називається три взаємно перпендикулярні числові осі (осі

координат OX , OY , OZ) з спільною точкою відліку O (початком координат). Вісь OX називається віссю **абсцис**, OY віссю –**ординат**, OZ – віссю **аплік** (рис.7).

За геометричною інтерпретацією повноти дійсних чисел для осей координат OX , OY і OZ впливає, що між точками простору системи

координат і трійками упорядкованих дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність.

Числа x, y, z називаються **координатами** точки M в просторі (позначається $M(x, y, z)$).

Орієнтація системи координат $OXYZ$ в просторі називається **правою (лівою)**, якщо з кінця осі OZ будь-який промінь на площині XOY з вершиною в початку координат обертається в цій площині від осі OX до осі OY проти руху (за рухом) годинникової стрілки на кут φ , де $0 < \varphi < \pi$.

Знаки координат x, y, z визначаються за означенням знаків координат числових осей, оскільки координати x, y, z точки $M(x, y, z)$ є координати точок координатних осей, які є проєкціями точки $M(x, y, z)$ на ці осі.

Прямокутні координати в просторі визначаються трьома координатними площинами, які перетинаються в спільній точці (початок координат) та попарно перетинаються по координатних осях. Вони називаються **координатними площинами** XOY, YOZ, XOZ . Координатні площини поділяють простір на вісім частин, які називаються **октантами** (грецьке – "окта" – вісім).

5.2. Полярна система координат на площині

На площині XOY точку $M(x, y)$ взаємно однозначно можна визначити з допомогою чисел ρ і φ , де $\rho \geq 0$ (полярний радіус) – довжина відрізка OM , φ (полярний кут) – кут між OM і додатним напрямом осі OX (рис.8). Числа ρ і φ називаються **полярними координатами точки** $M(\rho, \varphi)$. Вісь OX називається **полярною віссю**, точка – O **полюсом** полярної системи координат.

Полярний кут $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$), якщо будь-який промінь з вершиною в полюсі обертається від полярної осі до полярного радіуса OM проти руху (за рухом) годинникової стрілки. Якщо полярний радіус $\rho = 0$, тоді полярний кут не має змісту.

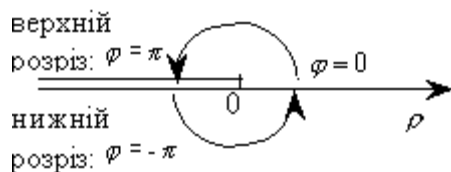


Рис. 9

Полярний кут для точки $M(\rho, \varphi)$ визначається неоднозначно: $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$, де $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ називається **головним значенням** полярного кута.

Однозначність полярного кута φ_0 геометрично визначається розрізом площини $O\rho\varphi$ в протилежному напрямі до полярної осі (рис.9).

Залежність між координатами точки M в полярній $M(\rho, \varphi)$ і прямокутній $M(x, y)$ системах координат

На рис.8, з прямокутного трикутника OMM_1 , маємо:

1) $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad -\pi < \varphi_0 \leq \pi.$

2) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$ Звідси $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$ причому:

1⁰. $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y \geq 0, \quad k = 0;$

2⁰. $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \quad x < 0, \quad y \geq 0, \quad k = 1;$

3⁰. $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, \quad x < 0, \quad y \leq 0, \quad k = -1;$

4⁰. $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y \leq 0, \quad k = 0.$

Головне значення полярного кута можна ще визначити за формулами

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

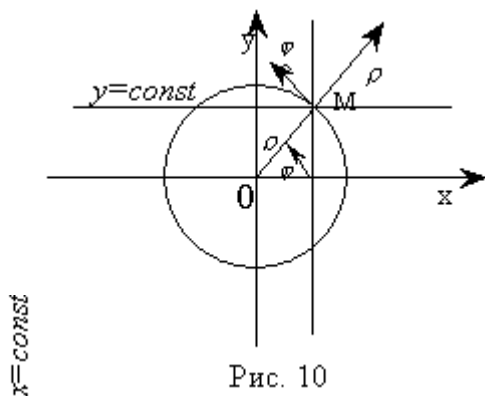


Рис. 10

В прямокутній системі

координат $ХОУ$ будь-яка точка $M(x, y)$ визначається координатними лініями, що проходять через цю точку, паралельно до координатних осей (рис.10). В полярній системі координат точка $M(\rho, \varphi)$ визначається перетином координатних ліній: кола $(\rho = \text{const}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi)$ і променя $(\varphi = \text{const}, \quad \rho \geq 0)$ з вершиною в полюсі (рис.10).

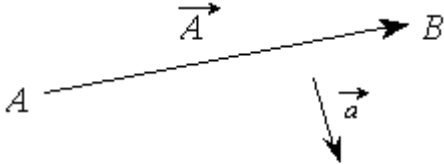


Рис.11

5.3. Вектори. Лінійні дії над векторами. Колінеарні та компланарні вектори

Величини, які характеризуються тільки числовими значеннями, називаються **скалярними**. Наприклад, маса, час, температура, густина тощо. А величини, які характеризуються числовими значеннями і напрямками, називаються **векторними** величинами. Наприклад, сила, переміщення точки, швидкість, прискорення тощо.

В математиці абстрагуються від конкретного змісту векторної величини і геометрично означають **вектор** як напрямлений відрізок на площині або в просторі, у якого вказано початок і кінець (позначається, наприклад, $\overrightarrow{AB}$, де A – початок, B – кінець вектора). Вектори позначають двома великими буквами або однією малою: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ (рис.11). Довжина вектора називається його **модулем** (позначається: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$).

Означення 30. Вектори, які лежать на одній прямій, або на паралельних прямих, називаються **колінеарними** (від латинського слова – *lines* – пряма) (позначається: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; якщо вони співнаправлені (протилежно направлені), позначається: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$)).

Неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Означення 31. Колінеарні вектори, що протилежно направлені і мають однакові модулі, називаються **протилежними** (позначається: $(-\vec{a})$ – протилежний до вектора $\vec{a}$).

Означення 32. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (позначається: $\vec{a} = \vec{b}$).

Означення 33. Вектор, у якого кінець співпадає з початком, називається **нульовим** (позначається: $\vec{0}$; $|\vec{0}| = 0$, а напрям невизначений).

Нульовий вектор вважається колінеарним до будь-якого вектора.

Означення 34. Вектор $\vec{a}$, модуль якого дорівнює одиниці ($|\vec{a}| = 1$), називається **одичним**.

Означення 35. Вектори називаються **компланарними** (від латинського слова *planus* – площина), якщо вони паралельні до однієї площини, або лежать в одній площині.

Операції над векторами будемо розглядати над так званими **вільними** векторами. Вільні вектори – це множина колінеарних векторів, рівних між собою. За початок вільного вектора можна прийняти будь-яку точку площини або простору. Геометрично це означає, що вільні вектори можна переміщувати на площині або в просторі паралельно до самих

себе. Будемо позначати вільні вектори однією

буквою: $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots$, а модулі – $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$, тощо. Введення цього позначення дає можливість побудувати операції векторної алгебри аналогічно алгебрі чисел.

Крім вільних векторів, розглядають:

1) **зв'язані** (нерухомі) вектори – вектори, що мають початком задану точку

прикладання, (наприклад, вектор $\overrightarrow{AB}$ напруги магнітного поля,

зв'язаний з точкою прикладання A цього поля, оскільки при

паралельному переносі вектора $\overrightarrow{AB}$ в іншу точку прикладання,

цей вектор буде характеризувати поле з іншими фізичними

властивостями);

2) **ковзні** вектори – вектори, що мають початком довільну точку на прямій,

яка визначає напрям вектора (наприклад, дія сили $\overrightarrow{AB}$, прикладеної в

точці A твердого тіла, згідно з одним із основних принципів статки,

однакова, якщо точку її прикладання A перенести в будь-яку точку на

прямій AB).

Векторна алгебра вільних векторів застосовується до зв'язних і ковзних векторів, оскільки, виявляється, що задання цих векторів зводиться до задання двох вільних векторів.

Зв'язні та ковзні вектори вивчаються в теоретичній механіці і мають застосування в інженерно-технічних дисциплінах.

У фізиці розглядаються ще величини, які характеризуються напрямками, але більш складної побудови, ніж вектори. Вони називаються **тензорами**.

Скаляри, вектори і тензори є об'єктами вивчення векторного числення.

5.3.1. Лінійні дії над векторами

а) **Добуток вектора на число**

Означення 36. Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ називається вектор $\vec{c}$

(позначається: $\vec{c} = \lambda \vec{a}$), що задовольняє умовам: $|\vec{c}| = |\lambda| |\vec{a}|$, $\vec{c} \parallel \vec{a}$; $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$,

якщо $\lambda > 0$; $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{c}$, якщо $\lambda < 0$; $\vec{c} = \vec{0}$, якщо $\lambda = 0$ (рис.12).

Вектор $-1 \times \vec{a}$ називається протилежним до вектора $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

б) **Додавання векторів**

Означення 37. Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$

(позначається: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$), який має початок, спільний з початком векторів $\vec{a}$

і $\vec{b}$ і є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$

(рис.13).

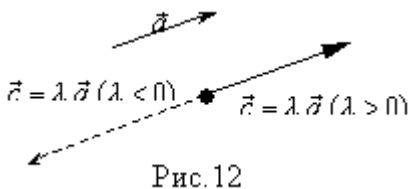


Рис.12

Означення суми двох векторів геометрично називається **правилом паралелограма**.

Оскільки $\vec{OA} = \vec{a}$; $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, то з означення суми векторів випливає правило **трикутника** додавання векторів: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AC}$ (рис.13). За правилом трикутника знаходимо суму векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Вона є вектор $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$, початок якого спільний з початком вектора $\vec{a}_1$, а кінець – спільний з кінцем вектора $\vec{a}_n$ (рис.14).

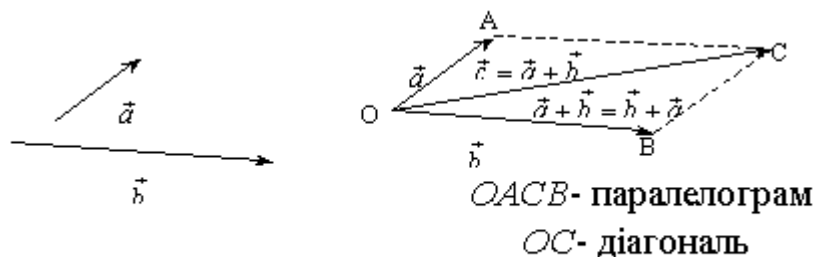


Рис. 13

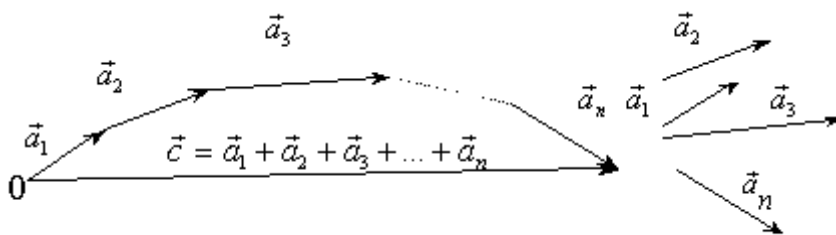


Рис. 14

в) **Віднімання векторів**

Віднімання векторів можна означати як дію, обернену до додавання.

Означення 38. Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ (позначається: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$), для якого $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

За правилом трикутника знаходимо суму векторів $\vec{a}$ і вектора $(-\vec{b})$, протилежного до вектора $\vec{b}$ (рис.15):

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{OA} + \vec{AB_1} = \vec{OB_1} = \vec{BA} = \vec{c}.$$

Отже, вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ з'єднує кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок і має напрям від кінця вектора $\vec{b}$ до кінця вектора $\vec{a}$.

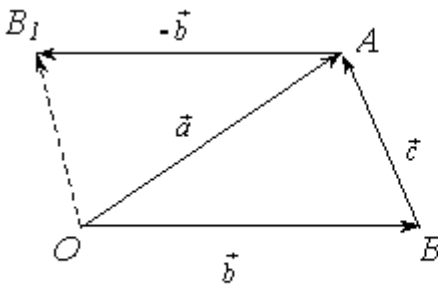


Рис. 15

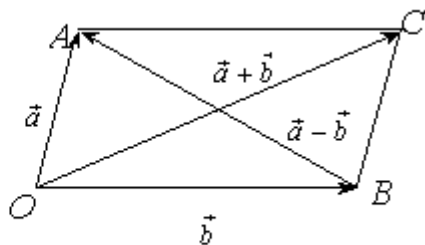


Рис. 16

Зауваження. З рис.16 побудови суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за правилом паралелограма, вектор $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, отже, в паралелограмі OACB одна

діагональ $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, а інша – $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.

Операції додавання, віднімання векторів, множення вектора на число називаються **лінійними**. Вони мають такі основні властивості:

- 1. Комутативність відносно додавання векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Доведення. За правилом трикутника додавання векторів, з $\triangle OAC$ (рис.13) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$. Оскільки $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$, то з $\triangle OBC$ маємо $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$. Отже, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. ●

- 2. Асоціативність відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Доведення. За правилом трикутника додавання векторів, з рис.17 маємо:

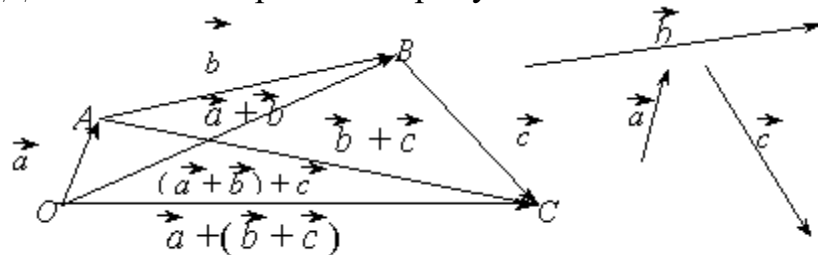


Рис. 17

$$1^0. \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

$$2^0. \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

Отже, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. ●

Наступні властивості розглянемо без доведення.

- 3. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

- 4. Дистрибутивність відносно додавання чисел:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

- 5. Асоціативність відносно множення чисел на вектор:

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

- 6. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- 7. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
- 8. $0 \times \vec{a} = \alpha \times \vec{0} = \vec{0}$.

Означення 39. **Ортом** вектора $\vec{a}$ називається одиничний вектор $\vec{a}^o \parallel \vec{a}$,

$$\vec{a}^o = \frac{1}{|\vec{a}|} \times \vec{a}$$

який визначається рівністю

Означення 40. **Лінійною комбінацією** векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

називається вектор

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \quad (1.58)$$

Де: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

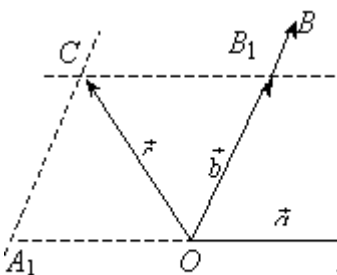


Рис. 18

Рівність (1.58) є розкладом вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Множина (скінченна або нескінченна) векторів, називається системою векторів. Будемо розглядати в посібнику тільки скінченну систему векторів.

Нехай задана скінченна система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Означення 41. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається **лінійно залежною**, якщо існує нульова лінійна комбінація $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ за умови, що хоча б один множник $\alpha_i \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Означення 42. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається **лінійно незалежною**, якщо їх лінійна комбінація $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ дорівнює нулю, коли всі $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Нехай система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ лінійно залежна.

Тоді з умови $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ випливає,

що $\vec{a}_k = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \vec{a}_{k-1} + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, де $\lambda_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_k}$, $\alpha_k \neq 0$, $j = \overline{1, n}$ ($j \neq k$). У

цьому випадку говорять, що вектор $\vec{a}_k$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n$. Отже, якщо система векторів лінійно залежна, то хоча б один з векторів цієї системи лінійно виражається через інші.

● **Теорема 10.** Кожний вектор $\vec{c}$ на площині має єдиний розклад за неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ цієї площини:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.59)$$

Доведення. 1⁰. Нехай (рис.18) вектори $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ з спільним початком в точці O.

Будуємо паралелограм OA_1CB_1 , в якому $\overrightarrow{OA_1} \uparrow \downarrow \vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} \uparrow \downarrow \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \vec{a}$ ($\alpha < 0$), $\overrightarrow{OB_1} = \beta \vec{b}$ ($\beta > 0$). Отже, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

2⁰. Єдиність розкладу (1.59).

Нехай $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$, $\alpha \neq \alpha_1$. Тоді з рівності $\alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ вектор $\vec{a}$ дорівнює:

$$\vec{a} = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} \vec{b}.$$

Це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, що суперечить умові теореми. ●

Означення 43. Два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ системи векторів площини, взяті в певному порядку, називаються її **базисом** (позначається: $\{\vec{a}, \vec{b}\}$).

За теоремою 10, будь-який вектор $\vec{c}$ системи векторів площини має єдиний розклад за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}\}$: $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

Числа α і β називаються **координатами вектора** $\vec{c}$ (позначається: $\vec{c} = (\alpha, \beta)$ у базисі $\{\vec{a}, \vec{b}\}$).

Орти $\vec{i}, \vec{j}$ взаємно перпендикулярні, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Вони утворюють ортонормований базис векторів площини (позначається: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$).

В прямокутній системі координат XOY орти $\vec{i}, \vec{j}$ є орти відповідних координатних осей OX, OY.

Додавання векторів, заданих координатами в базисі $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

Нехай $\vec{c}_1 = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$, $\vec{c}_2 = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$. Тоді $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = (\alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}) + (\alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}) =$
 $= [\text{за властивістю } 2^0] = (\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{a}) + (\beta_1 \vec{b} + \beta_2 \vec{b}) = [\text{за властивістю } 4^0] =$
 $= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b}$; або $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = (\alpha_1; \beta_1) + (\alpha_2; \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2)$.

Множення вектора, заданого координатами

в базисі $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ на число $\gamma \in \mathbb{R}$

Нехай $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді $\gamma \vec{c} = \gamma(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = [\text{за властивістю } 3^0] =$
 $\gamma(\alpha \vec{a}) + \gamma(\beta \vec{b}) = [\text{за властивістю } 5^0] = (\gamma \alpha) \vec{a} + (\gamma \beta) \vec{b}$, або
 $\gamma \vec{c} = \gamma(\alpha; \beta) = (\gamma \alpha; \gamma \beta)$.

● **Теорема 11.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тоді і лише тоді, коли вони лінійно залежні.

Доведення 1⁰. Необхідність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тоді $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні.

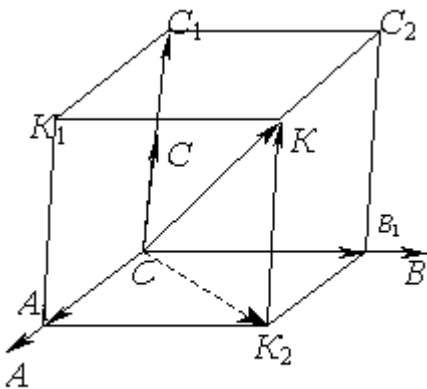


Рис. 19

2⁰. Достатність. Нехай $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ ($\alpha \neq 0$). Тоді $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b}$.

Отже $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. ●

Вектори $\vec{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ рівні, якщо рівні їх відповідні координати: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Вектор $\vec{a} = (\alpha, \beta) = \vec{0}$, якщо $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

● **Теорема 12.** Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некопланарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ простору єдиним чином розкладається у єдину комбінацію векторів:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (1.60)$$

Доведення. 1⁰. Нехай на рис.19 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ – некопланарні вектори і $\vec{OK} = \vec{d}$. Проводячи через точку K три площини $K_1C_1C_2K$, $K_2KC_2B_1$, $A_1K_1KK_2$ відповідно паралельні площинам AOB , AOC і BOC , побудуємо паралелепіпед $A_1OB_1K_2KC_2C_1K_1$, в якому $\vec{OA_1} \uparrow \vec{a}$, $\vec{OB_1} \uparrow \vec{b}$, $\vec{OC_1} \uparrow \vec{c}$. Вектор $\vec{OA_1} = \alpha \vec{a}$ ($\alpha > 0$), $\vec{OB_1} = \beta \vec{b}$ ($\beta > 0$), $\vec{OC_1} = \gamma \vec{c}$ ($\gamma > 0$). За правилом додавання векторів, маємо

$$\vec{OK} = \vec{OK_2} + \vec{K_2K} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

$$\text{Отже, } \vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

2⁰. Доведемо єдиність розкладу (1.60). Нехай $\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$, причому, наприклад $\alpha \neq \alpha_1$. Тоді з рівності $\alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ дістанемо:

$$\vec{a} = \frac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1} \vec{b} + \frac{\gamma_1 - \gamma}{\alpha - \alpha_1} \vec{c}.$$

Звідси, за теоремою 10, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні, тобто некопланарні, що суперечить умові теореми. Отже, розклад вектора $\vec{d}$ простору за некопланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ у вигляді (1.60) єдиний. ●

Означення 44. Три некопланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ системи векторів простору, взяті у певному порядку, називаються його **базисом** (позначається: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$).

За теоремою 12, будь-який вектор $\vec{d}$ системи векторів простору має єдиний

розклад за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$: $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$. Числа α, β і γ

називаються **координатами** вектора $\vec{d}$ (позначається: $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$) у базисі $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Якщо орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно перпендикулярні (ортогональні), то вони утворюють ортонормований базис векторів простору (позначається: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$).

В прямокутній системі координат OXYZ орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є орти відповідних координатних осей OX, OY, OZ.

Лінійні операції над векторами, заданими координатами в базисі $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Нехай $\vec{d}_1 = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$, $\vec{d}_2 = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c}$. З лінійних операцій векторів і їх властивостей маємо

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c},$$

або

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) + (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2; \gamma_1 + \gamma_2);$$

$$2) \lambda \vec{d}_1 = (\lambda \alpha_1) \vec{a} + (\lambda \beta_1) \vec{b} + (\lambda \gamma_1) \vec{c}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

або

$$\lambda \vec{d}_1 = (\lambda \alpha_1; \lambda \beta_1; \lambda \gamma_1)$$

Вектори $\vec{d}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ і $\vec{d}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ рівні, якщо рівні їх відповідні координати: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Вектор $\vec{d} = (\alpha; \beta; \gamma) = \vec{0}$, якщо $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Сукупність з n лінійно незалежних векторів (а будь-які $(n+1)$ вектори лінійно залежні), для яких введені лінійні операції та їх властивості, називається **n -вимірним лінійним векторним простором** (позначається: V^n). В цьому просторі n лінійно незалежних його векторів утворюють базис.

● **Теорема 13** (без доведення). Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ базис простору V^n , то будь-

який вектор $\vec{a} \in V^n$ єдиним способом розкладається в лінійну комбінацію:
 $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$.

● **Теорема 14** (без доведення). Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ в базисі векторного простору V^n задана координатами:

$$\vec{a}_1 = (\alpha_{11}; \alpha_{12}; \dots; \alpha_{1n}), \vec{a}_2 = (\alpha_{21}; \alpha_{22}; \dots; \alpha_{2n}), \dots, \vec{a}_k = (\alpha_{k1}; \alpha_{k2}; \dots; \alpha_{kn}),$$

то ранг матриці A , складеної з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

дорівнює максимальному числу лінійно незалежних векторів системи.

Наслідок. Система n векторів у просторі V^n лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли визначник Δ матриці (1.61) (при $k=n$), у будь-якому базисі простору V^n не дорівнює нулю.

Зокрема, в просторі V^3 дістаємо умову про те, що будь-які три його вектори, задані координатами в базисі простору V^3 є лінійно незалежні або лінійно залежні.

Нехай

$$\vec{a}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1), \quad \vec{a}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2), \quad \vec{a}_3 = (\alpha_3; \beta_3; \gamma_3) \quad (1.62)$$

Якщо ці вектори є нульовою лінійною комбінацією:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

або

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda_1 (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) + \lambda_2 (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) + \lambda_3 (\alpha_3; \beta_3; \gamma_3) = \\ = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3; \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3; \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3).$$

З означення рівності векторів в координатній формі дістанемо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 = 0, \\ \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3 = 0, \\ \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3 = 0. \end{cases} \quad (1.63)$$

1⁰. Якщо вектори (1.62) лінійно залежні, то система (1.63) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник Δ , складений з координат векторів (1.62) дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

2⁰. Якщо вектори (1.62) лінійно незалежні, то система (1.63) має єдиний нульовий розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, коли визначник її $\Delta \neq 0$.

Отже, якщо вектори (1.62) лінійно залежні (лінійно незалежні), то визначник, елементами якого є координати цих векторів, $\Delta = 0$ ($\Delta \neq 0$).

Приклад № 43. З'ясувати, чи утворюють базис простору вектори:

а) $\vec{a}_1 = (1; 2; 3), \quad \vec{a}_2 = (2; 3; 4), \quad \vec{a}_3 = (3; 4; 5);$

б) $\vec{b}_1 = (3; -2; 0), \quad \vec{b}_2 = (0; 1; -4), \quad \vec{b}_3 = (4; 0; -5).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 16 - 20 = 0.$$

▲ а)

Оскільки $\Delta = 0$, то за наслідком з теореми 14 вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно залежні; вони не утворюють базис. ▼

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 32 = 17 \neq 0.$$

▲ б)

Вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ – лінійно незалежні; вони утворюють базис. ▼

Приклад № 44. Довести, що вектори $\vec{a}_1=(1; 2; 3)$, $\vec{a}_2=(2; 3; 4)$, $\vec{a}_3=(4; 3; 4) \in V^3$

утворюють базис. Розкласти вектор $\vec{a}=(3; 2; 3) \in V^3$ за цим базисом.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 32 + 18 - 36 - 12 - 16 = -2$$

▲

Отже, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ – базис векторного простору V^3 .

Розкладемо вектор $\vec{a}$ за цим базисом:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3,$$

де $\lambda_i, i = \overline{1, 3}$ – невідомі координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Визначимо їх з умови

$$\begin{aligned} (3; 2; 3) &= \lambda_1(1; 2; 3) + \lambda_2(2; 3; 4) + \lambda_3(4; 3; 4) = \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3; 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3; 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3), \end{aligned}$$

звідки, використовуючи рівність двох векторів у координатній формі, дістанемо неоднорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3. \end{cases} \quad (1.64)$$

Знаходимо її розв'язок за формулами Крамера: $\Delta = -2 \neq 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\text{Тоді,} \quad \lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Отже, розклад вектора $\vec{a}$ за базисом $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$: $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. ▼

Приклад № 45. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3; -4)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; -4; 1)$, $\vec{a}_3 = (3; -4; 1; 2)$, $\vec{a}_4 = (0; 0; 0; 1) \in V^4$ утворюють базис. Розкласти вектор $\vec{a} = (2; -5; 8; -3) \in V^4$ за базисом $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

▲

отже, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ – базис векторного простору V^4 .

Розкладемо вектор $\vec{a}$ за цим базисом:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4.$$

Визначимо $\lambda_i, i = \overline{1,4}$ з системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = -5, \\ 3\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 8, \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = -3. \end{cases} \quad (1.65)$$

Розв'яжемо цю систему методом Жордана -Гаусса (табл.10).

Таблиця 10

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_i	k
1	2	3	0	2	8
2	3	-4	0	-5	-4
3	-4	1	0	8	8
-4	1	2	1	-3	-3
1	2	3	0	2	8
0	-1	-10	0	-9	-20
0	-10	-8	0	2	-16
0	9	14	1	5	29
0	0	-17	0	-16	-32
1	1	10	0	9	20
0	0	92	0	92	184
0	0	-76	1	-76	-151
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1	0
0	0	1	0	1	2
0	0	0	1	0	1

Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0.$

Отже, розклад вектора $\vec{a} \in V^4$ за базисом $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$: $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3.$ ▼

5.4. Проекція вектора на вісь. Проекція вектора на вектор

1⁰. Геометрична проекція вектора площини на вісь.

Означення 45. Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь u (на вектор $\vec{b}, \vec{b} \subset u$) називається вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} \subset u$ (позначається: $\vec{a}_1 = \text{Pr}_u \overrightarrow{AB}$ ($\text{Pr}_u \vec{a}$)), де $A_1 = \text{Pr}_u A, B_1 = \text{Pr}_u B$ (рис.20).

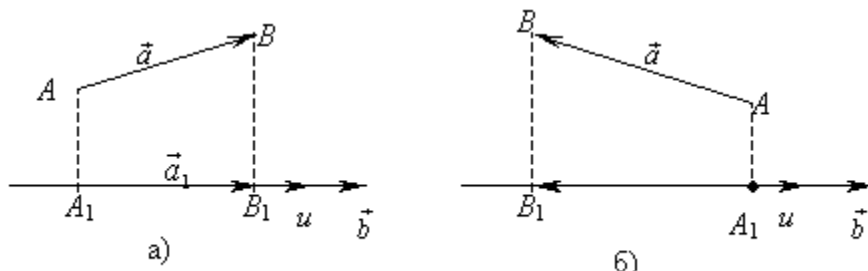


Рис. 20

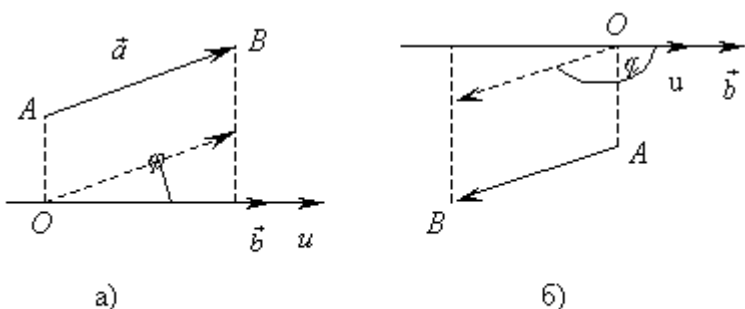


Рис. 21

Означення 46. Кутом φ (рис.21) між

вектором $\vec{a}$ і віссю u (між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b} \subset u$) називається менший з кутів, на який треба повернути вісь u , щоб вона збігалась за напрямом з вектором $\vec{a}$

(позначається: $\varphi = (\vec{a}, \hat{u}) = (\vec{a}, \hat{\vec{b}})$).

За означенням, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тоді $\varphi = (\vec{a}, \hat{u}) = 0$

, якщо $\vec{a} \uparrow \uparrow u$ і $\varphi = (\vec{a}, \hat{u}) = \pi$, якщо $\vec{a} \uparrow \downarrow u$.

2⁰. Скалярна проекція вектора площини на вісь.

Означення 47. Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь u (вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$) називається число, що дорівнює модулю $|\text{Pr}_u \overrightarrow{AB}| = |\vec{a}_1| = \alpha_1$, взятому зі знаком "+", якщо $\vec{a} \uparrow \uparrow u$ і зі знаком "-", якщо $\vec{a} \uparrow \downarrow u$, причому

$$\alpha_1 = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \alpha_1 > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_1 < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \quad (\text{рис.22}).$$

За означенням, (рис. 22)

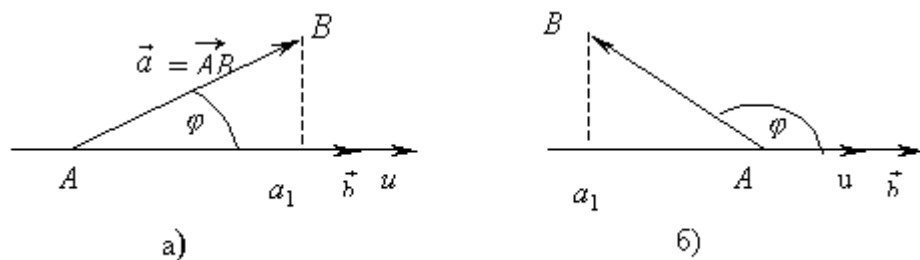


Рис. 22

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} &= |\vec{a}| \cos \varphi, & \varphi &= \left(\vec{a}, \vec{b} \right); \\ \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{a} &= |\vec{a}| \cos \varphi, & \varphi &= \left(\vec{a}, \vec{u} \right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Властивості проєкцій:

● 1. Проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь:

$$\text{Pr}_{\vec{u}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{b}. \quad (1.67)$$

Доведення. Нехай вектори $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, тоді $\vec{a} + \vec{b} = \overline{AC} = \vec{c}$ (рис.23). За геометричним означенням проєкції вектора, маємо: $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{c} = \text{Pr}_{\vec{u}} \overline{AC} = \overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{c}_1 = \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{b}$. ●

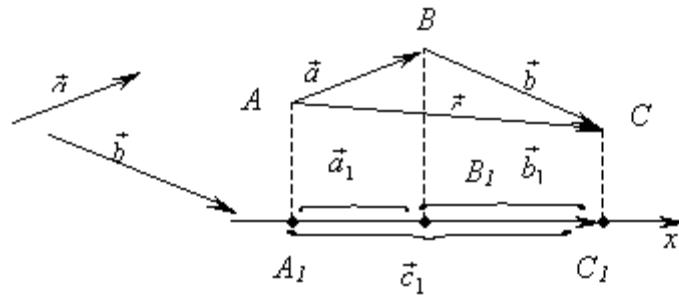


Рис.23

● 2. Проекція добутку вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ на вісь $\vec{u}$ дорівнює добутку числа λ на проєкцію цього вектора на вісь $\vec{u}$:

$$\text{Pr}_{\vec{u}} \lambda \vec{a} = \lambda \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{a}. \quad (1.68)$$

Доведення. 1) Нехай $\lambda > 0$ і $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{u} \right) = \left(\lambda \vec{a}, \vec{u} \right)$, оскільки $\lambda \vec{a} \uparrow \vec{a}$ (рис.24).

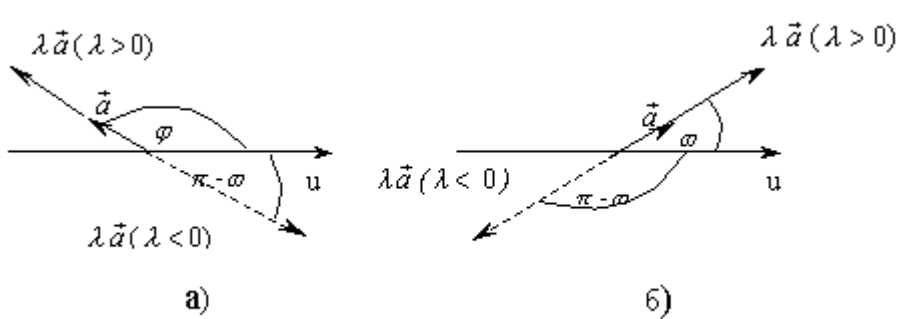


Рис. 24

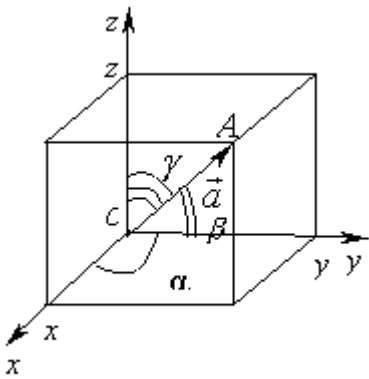


Рис. 25

Тоді за означенням 47 при $\lambda > 0$

$$\text{Pr}_u(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi = |\lambda| |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \text{Pr}_u \vec{a}.$$

2) Якщо $\lambda < 0$, то $\lambda \vec{a} \updownarrow \vec{a}$, тоді $(\lambda \vec{a}, \vec{u}) = \pi - \varphi$. Маємо (рис.24)

$$\text{Pr}_u(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = -\lambda |\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = \lambda \text{Pr}_u \vec{a}. \quad \bullet$$

● 3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, то їх проекції рівні.

Доведення випливає з означення рівності векторів. ●

Доведені властивості вірні і для проекцій векторів на координатні

осі в площині і просторі, які в системі

координат OXYZ позначаються $x = \text{Pr}_{Ox} \vec{a}$, $y = \text{Pr}_{Oy} \vec{a}$, $z = \text{Pr}_{Oz} \vec{a}$, і

називаються координатами вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = (x, y, z)$.

За означенням 45 геометричної проекції, $\text{Pr}_{Ox} \vec{a} = x \vec{i}$,

$\text{Pr}_{Oy} \vec{a} = y \vec{j}$; $\text{Pr}_{Oz} \vec{a} = z \vec{k}$. Тоді вектор $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, за теоремою 10,

дорівнює:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = (x, y, z).$$

Означення 48. Вектор, початок якого збігається з початком координат, називається **радіус-вектором** (позначається: $\vec{r} = \overline{OA}$ (рис.25)).

З рис.25, $\overline{OA}$ є діагональ прямокутного паралелепіпеда, квадрат довжини якої дорівнює сумі квадратів довжин його сторін

$$|\overline{OA}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Звідси

$$|\vec{a}| = |\overline{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.69)$$

Отже, модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

За означенням 47 скалярної проекції, $x = \text{Pr}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$,

$$y = \text{Pr}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = \text{Pr}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (1.70)$$

де α, β, γ – кути, які утворює вектор $\vec{a} = \overline{OA}$, відповідно з осями координат (рис.25).

Звідси

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (1.71)$$

Вони називаються *напрямними косинусами вектора*.

5.5. Лінійні операції над векторами в координатній формі в базисі

Нехай заданий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і вектори $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3, \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$.

Сума векторів. Запишемо суму векторів

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) + (\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3)$$

або, згідно властивостям лінійних операцій над векторами,

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3. \quad (1.72)$$

Таким чином, при додаванні векторів їх відповідні координати додаються.

Добуток вектора на число. Помножимо вектор $\vec{a}$ на число λ :

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3)$$

або

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \alpha_1) \vec{e}_1 + (\lambda \alpha_2) \vec{e}_2 + (\lambda \alpha_3) \vec{e}_3. \quad (1.73)$$

Тобто при множенні вектора на число координати вектора множаться на це число.

Приклад 46. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано вектори $\vec{a} = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$
 $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Знайти вектор $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язок. Згідно формулам (5.3), (5.4)

$$\begin{aligned} \vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b} &= 5 \cdot (6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + 2 \cdot (-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = \\ &= (30 - 2)\vec{e}_1 + (-10 + 8)\vec{e}_2 + (5 + 6)\vec{e}_3 = 28\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Відповідь: $\vec{c}(28, -2, 11)$.

Рівність векторів. З означення вектора як направленої відрізка, який можна переміщати в просторі паралельно самому собі, випливає, що *два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні* тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1, \\ \alpha_2 &= \beta_2, \\ \alpha_3 &= \beta_3.\end{aligned}$$

Колінеарність векторів. Вияснимо умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами.

Так як $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то за властивостями добутку вектора на число можна записати $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, де λ – деяке число, тобто

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 = \lambda \vec{a} = (\lambda \alpha_1) \vec{e}_1 + (\lambda \alpha_2) \vec{e}_2 + (\lambda \alpha_3) \vec{e}_3.$$

Звідси $\beta_1 = \lambda \alpha_1, \beta_2 = \lambda \alpha_2, \beta_3 = \lambda \alpha_3$, тобто $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda, \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \lambda, \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda$ або

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda. \quad (1.74)$$

Таким чином, *координати колінеарних векторів пропорційні*. Справедливе і обернене твердження: *вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні*.

Зауваження. Співвідношення (5.5) умовно записуватимемо і у випадку, коли серед чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ є рівні нулю.

Нехай на площині заданий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і вектори $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2), \vec{b}(\beta_1, \beta_2)$. В цьому випадку мають місце формули, аналогічні формулам (5.3) – (5.5).

Приклад 47. Перевірити, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, задані в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

а) $\vec{a}(2, -3, 1), \vec{b}(-4, 6, -2)$; б) $\vec{a}(4, 0, 5), \vec{b}(-4, 0, -5)$.

Розв'язок. Згідно формули (5.5):

$$\text{а) } \frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{-2}{1} = -2, \text{ а отже } \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

$$\text{б) } \frac{4}{-4} = \frac{0}{0} = \frac{5}{-5}.$$

Так як друга координата в обох векторів рівна нулю, то їх можна розглядати як вектори, задані на площині в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_3$, а отже $\frac{4}{-4} = \frac{5}{-5} = -1$; $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Приклад 48. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ дано вектори $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{c} = 6\bar{e}_1 + 19\bar{e}_2$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Розв'язок. Якщо два вектори утворюють базис, то вони неколінеарні. Згідно формули (5.5):

$$\frac{2}{1} \neq -\frac{1}{5},$$

а отже вектори $\bar{a}, \bar{b}$ неколінеарні і утворюють базис.

В новому базисі $\bar{a}, \bar{b}$ вектор $\bar{c}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{c} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b},$$

де коефіцієнти α_1, α_2 – невідомі і є координатами вектора $\bar{c}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\bar{c}$ в координатній формі:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

що рівносильно системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} 6 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 19 = -\alpha_1 + 5\alpha_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 10 + 1 = 11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 19 \cdot 1 = 30 - 19 = 11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 - (-1) \cdot 6 = 38 + 6 = 44.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \frac{11}{11} = 1; \quad \alpha_2 = \frac{44}{11} = 4.$

Відповідь: $\vec{c}(1, 4)_\tau$.



Приклад № 49. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ та $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$.

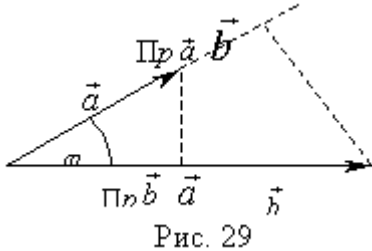
▲ В паралелограмі ОАСВ (рис.16) $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$.

Маємо $\vec{OC} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{k} - 3\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (1; -2; 1),$

$\vec{BA} = \vec{i} + \vec{j} - (\vec{k} - 3\vec{j}) = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} = (1; 4; -1).$

Звідси $|\vec{OC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}.$ ▼

^[1] Декарт Р. (1596-1650) – французький математик, є творцем системи координат, аналітичної геометрії. Тому систему координат ще називають декартовою.



§6. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ, ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 49. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається: $\vec{a} \cdot \vec{b}$) називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

За означенням,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right). \quad (1.76)$$

Якщо в формулі (1.76) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \right)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$). Зокрема, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; при $\varphi = \pi$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

Оскільки $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$, $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$ (рис. 29), дістанемо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (1.77)$$

Звідси $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$

$$\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \quad (1.78)$$

6.1. Властивості скалярного добутку

● 1. Комутативність

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (1.79)$$

Доведення. За означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = [\text{за комутативністю добутку чисел}] = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ●

● 2. Асоціативність відносно множення вектора на число

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доведення. За формулами (1.77) та (1.68) маємо

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \bullet$$

Наслідок з властивостей 1, 2:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = (\lambda \beta) (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.80)$$

● 3. Дистрибутивність відносно додавання

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}.$$

Доведення. Згідно з формулами (1.77) та (1.67) дістанемо $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = |\vec{b}| (\text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_2) = [\text{за дистрибутивністю чисел}] = |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}.$ ●

● 4. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$) дорівнює нулю ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$).

● 5. Скалярний квадрат вектора $\vec{a}$ (позначається: $\vec{a}^2$) дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2,$$

звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (1.81)$$

Доведення властивостей 4, 5 безпосередньо випливає з означення скалярного добутку. ●

6.2. Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Таблиця скалярних добутків (табл.11) ортів базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ($\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$).

Таблиця 11

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Нехай $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Тоді, користуючись табл. 11 і властивостями 2,3 скалярного добутку, дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i} \cdot \vec{i}) + \\ &+ x_1y_2(\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &+ z_1x_2(\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \cdot \vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (1.82)$$

Модуль скалярного квадрата $\vec{c}^2$ вектора $\vec{c} = (x, y, z)$ дорівнює

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.83)$$

Зокрема, в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

а

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

З формули (1.76) дістанемо

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (1.84)$$

Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, тоді

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1.85)$$

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, або

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (1.86)$$

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). З рівності векторів $\vec{a}$ і $\lambda \vec{b}$ маємо $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$. Звідси

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (1.87)$$

Приклад № 50. Задано три точки $M_1 (2;0;1)$, $M_2 (2;1;0)$, $M_3 (1;0;0)$.

Знайти $\angle M_1 M_2 M_3 = \varphi$.

▲ Маємо за формулою (1.73):

$$\overline{M_2 M_1} = (0, -1; 1) \text{ ; } \overline{M_2 M_3} = (-1, -1; 0).$$

Тоді за формулою (1.85):

$$\cos \varphi = \cos \left(\overline{M_2 M_1}, \overline{M_2 M_3} \right) = \frac{0 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 \times 0}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 51. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

Обчислити $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$, $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.

▲ За формулами (1.78):

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{8}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 52. Виконати дії:

$$(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2.$$

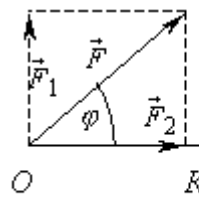


Рис. 30

▲ За властивостями та операціями скалярного добутку і

додавання векторів, маємо:

$$\begin{aligned} (2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2 &= 2\vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{k} - 2\vec{k} \cdot \vec{k} + \\ + \vec{i}^2 - 4\vec{i} \cdot \vec{k} + 4\vec{k}^2 &= -1 - 2 + 1 + 4 = 2. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Задача. Обчислити роботу A сталої за величиною і напрямом сили $\vec{F} = \overrightarrow{OK}$ при прямолінійному переміщенні матеріальної точки на віддаль $\vec{S} = \overrightarrow{OM}$ (рис.30).

▲ Сила $\vec{F}$ розкладається на складові $\vec{F}_1 \perp \overrightarrow{OM}$, $\vec{F}_2 \parallel \overrightarrow{OM}$. Сила $\vec{F}_1$ зрівноважується силою тиску, а $\vec{F}_2$ – рушійна сила, що виконує роботу, її модуль $F_2 = |\vec{F}| \cos \varphi$, $\varphi = \left(\vec{F}, \wedge \vec{S} \right)$. Тоді

$$A = F_2 \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos \varphi = [\text{за означенням 49}] = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Отже, робота сталої сили $\vec{F}$ при прямолінійному переміщенні $\vec{S}$ матеріальної точки дорівнює скалярному добутку $\vec{F} \cdot \vec{S}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad \blacktriangledown \quad (1.88)$$

Приклад № 53. Нехай переміщення $\vec{S} = (2; 1; -2)$ і сила $\vec{F} = (5; 4; 3)$.

Обчислити роботу A сили $\vec{F}$ і кут $\left(\vec{F}, \wedge \vec{S} \right)$.

▲ За формулами (1.88), (1.82) та (1.85) маємо

$$\begin{aligned} A = \vec{F} \cdot \vec{S} &= 5 \times 2 + 4 \times 1 + 3 \times (-2) = 8, \\ \cos \left(\vec{F}, \wedge \vec{S} \right) &= \frac{A}{|\vec{F}| |\vec{S}|} = \frac{8}{\sqrt{25+16+9} \sqrt{4+1+4}} = \frac{8}{\sqrt{50} \sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{15}, \\ \left(\vec{F}, \wedge \vec{S} \right) &= \arccos \frac{4\sqrt{2}}{15}. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Приклад № 54. Знайти модуль рівнодійної $\vec{R}$ чотирьох компланарних сил, які прикладені до точки O , якщо величина кожної сили дорівнює $10H$, а кут між кожними двома послідовними силами дорівнює 45° .

▲ Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – компланарні сили такі, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 10$, а $\left(\vec{a}, \wedge \vec{b} \right) = \left(\vec{b}, \wedge \vec{c} \right) = \left(\vec{c}, \wedge \vec{d} \right) = 45^\circ$, $\left(\vec{a}, \wedge \vec{c} \right) = \left(\vec{b}, \wedge \vec{d} \right) = 90^\circ$, $\left(\vec{a}, \wedge \vec{d} \right) = 135^\circ$ (рис.31).

Рівнодійна $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

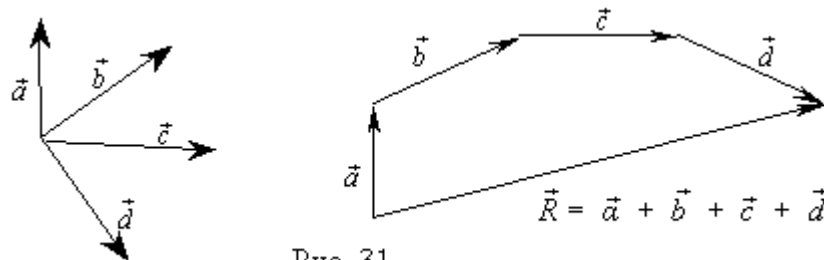


Рис. 31

Тоді

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{\vec{R}^2} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2},$$

де $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 = [\text{за властивостями 3, 1 скалярного добутку}]$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} =$$

$= [\text{за формулами (1.76)}] =$

$$= 4 \cdot 100 + 2 \cdot 100 \cos 45^\circ + 2 \cdot 100 \cos 90^\circ + 2 \cdot 100 \cos 135^\circ + 2 \cdot 100 \cos 45^\circ +$$

$$+ 2 \cdot 100 \cos 45^\circ + 2 \cdot 100 \cos 90^\circ = 400 + 200 \frac{\sqrt{2}}{2} - 200 \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 400 + 200\sqrt{2} = 100(4 + 2\sqrt{2}).$$

Отже, $R = 10\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \quad (H) \quad \blacktriangledown$

Приклад № 55. Довести, що:

а) вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a} = (4; -2; 1)$ і $\vec{b} = (12; -6; 3)$ колінеарні.

▲ а) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0. \quad \text{Отже, } \vec{a} \perp \vec{b}. \quad \blacktriangledown$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

б). З умови колінеарності двох векторів –

$$\frac{4}{12} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}. \quad \text{Отже } \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad \blacktriangledown$$

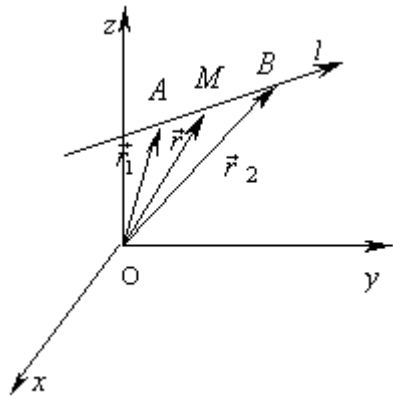


Рис. 32

6.3. Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2) \in l$ (рис.32).

Знайдемо точку $M(x, y, z) \in l$, яка поділяє відрізок AB в заданому відношенні λ :

$$\lambda = \frac{\text{Пр}_l \overline{AM}}{\text{Пр}_l \overline{MB}}, \text{ або } \text{Пр}_l \overline{AM} = \lambda \text{Пр}_l \overline{MB}. \quad (1.89)$$

Якщо $M \in AB$ ($M \notin AB \subset l$, $M \in l$),

то поділ відрізка точкою M називається **внутрішнім (зовнішнім)** і $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

На рис. 32, радіуси-вектори точок $A, M, B \in l$ відповідно дорівнюють $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_2 = (x_2; y_2; z_2)$.

Тоді

$$\overline{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overline{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z).$$

За формулою (1.89) маємо $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки, при $\lambda \neq -1$, дістанемо:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}. \quad (1.90)$$

З рівності векторів в координатній формі, матимемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, 1 + \lambda \neq 0 \quad (\lambda \neq -1). \quad (1.91)$$

Зокрема, координати середини відрізка AB ($\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.92)$$

Приклад № 56. Знайти точку $M(x, y)$, що поділяє

відрізок AB , $A(2; 1)$, $B(4; -2)$, у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$.

▲ За формулою (1.91) маємо

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2} \times 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{1 + \frac{1}{2} \times (-2)}{1 + \frac{1}{2}} = 0.$$

Отже, $M(\frac{8}{3}; 0)$. ▼

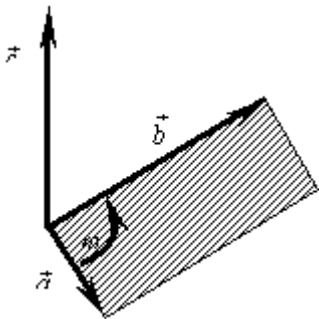


Рис. 36

§7. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

7.1. Права і ліва в'язка векторів

Означення 50. Трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **упорядкованою**, якщо вектори задано в певному порядку, тобто вказано, який з них є першим, другим і третім.

Означення 51. Некомпланарні упорядковані, зведені до спільного початку, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють **праву (ліву)** в'язку векторів (позначається: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$), якщо в кінці вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти руху (за рухом) годинникової стрілки (рис.33, рис.34).

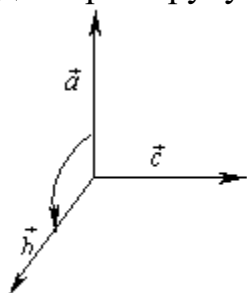


Рис. 33

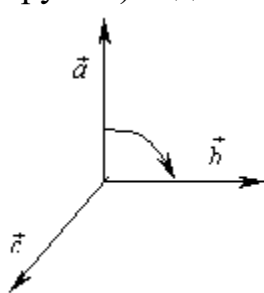


Рис. 34

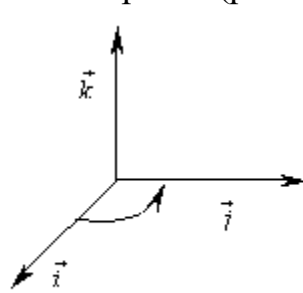


Рис. 35

Зокрема,

орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють праву $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$, наприклад, – ліву) в'язку векторів (рис.35).

7.2. Векторний добуток векторів

Означення 52. **Векторним добутком** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$ (позначається: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, або $\vec{c} = [\vec{a} \vec{b}]$), модуль якого дорівнює:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right), \quad (1.93)$$

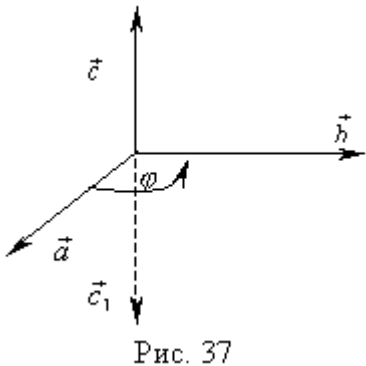
а напрям визначається умовами:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – права в'язка векторів (рис.36).

7.2.1. Властивості векторного добутку

●1. **Антикомутативність:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$



Доведення. Нехай $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}_1$. Їх модулі рівні:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{b}| |\vec{a}| \sin(\angle(\vec{b}, \vec{a})) = |\vec{c}_1|$$

Вектори $\vec{c}$ і $\vec{c}_1$ колінеарні: $\vec{c} \parallel \vec{c}_1$, оскільки вони перпендикулярні до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

За означеннями 51, 52, в'язки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ і $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}_1)$ — праві, а напрями векторів $\vec{c}$ і $\vec{c}_1$ в цих в'язках протилежні ($\vec{c} = -\vec{c}_1$) (рис.37). Отже $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

•

❶ 2. Асоціативність відносно скалярного множника:

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}).$$

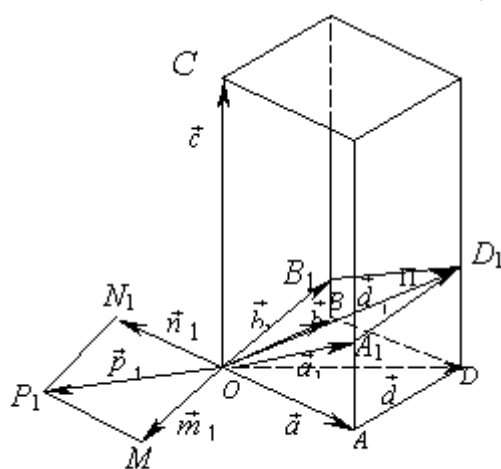


Рис. 39

Доведення.

Маємо $|(\alpha \vec{a}) \times \vec{b}| = |\alpha \vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ і $|\alpha (\vec{a} \times \vec{b})| = |\alpha| |\vec{a} \times \vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$.

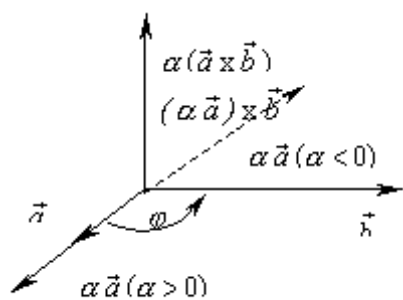


Рис. 38

Отже $|(\alpha \vec{a}) \times \vec{b}| = |\alpha (\vec{a} \times \vec{b})|$. Крім того, $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \perp \vec{b}$, $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \perp \vec{a}$ і $\alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $\alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$. Звідси $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$. $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \uparrow \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$ (рис.38), якщо $\alpha > 0$ (при $\alpha > 0$, $\alpha \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$); $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \downarrow \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$, якщо $\alpha < 0$, оскільки $\alpha \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$, тому $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \downarrow \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$ і $\alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \uparrow \downarrow \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$. Це означає, що при $\alpha < 0$ $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \uparrow \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$. Отже, $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$. •

Наслідок:

$$(\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = (\alpha \beta)(\vec{a} \times \vec{b}).$$

● 3. Дистрибутивність

відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Доведення. На рис.39

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \vec{b}, \quad \overline{OA} = \vec{a}, \\ \overline{OD} &= \vec{a} + \vec{b} = \vec{d}, \quad \overline{OC} = \vec{c}. \end{aligned}$$

Будуємо площину $\Pi \perp \vec{c}$, $O = \Pi \cap \vec{c}$,

$\text{Пр}_{\Pi} OADB = \square OA_1D_1B_1$ (тут позначено $\square$ – паралелограм);

вектори $\overline{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overline{OB_1} = \vec{b}_1$, $\overline{OD_1} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{d}_1$ є відповідно проекції векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$ на площину Π .

Маємо $\vec{a}_1 \times \vec{c} = \vec{m}_1$, $\vec{b}_1 \times \vec{c} = \vec{n}_1$, $\vec{p}_1 = \vec{m}_1 + \vec{n}_1$, де $\vec{m}_1 = \overline{OM_1}$, $\vec{n}_1 = \overline{ON_1}$, $\vec{p}_1 = \overline{OP_1}$ (рис.39). Їх модулі

$$m_1 = a_1 c, \quad n_1 = b_1 c, \quad p_1 = d_1 c. \quad (1.94)$$

З рівностей (1.94):

$$\frac{m_1}{a_1} = \frac{n_1}{b_1} = \frac{p_1}{d_1} = c.$$

Чотирикутник $OM_1P_1N_1$ подібний до паралелограма $OB_1D_1A_1$, тобто він є паралелограм. Отже, $\vec{m}_1 + \vec{n}_1 = \vec{p}_1$, або $\vec{a}_1 \times \vec{c} + \vec{b}_1 \times \vec{c} = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \times \vec{c}$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \text{Пр}_{\Pi} (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) &= \text{Пр}_{\Pi} \vec{a} \times \vec{c} + \text{Пр}_{\Pi} \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}_1 \times \vec{c} + \vec{b}_1 \times \vec{c}, \\ \text{Пр}_{\Pi} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \text{Пр}_{\Pi} \vec{d} \times \vec{c} = \vec{d}_1 \times \vec{c} = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \times \vec{c}, \end{aligned}$$

тоді

$$\text{Пр}_{\Pi} (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) = \text{Пр}_{\Pi} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}.$$

За властивістю 3 проєкцій: $(\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$. ●

● 4. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.36):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = S, \quad \varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right). \quad (1.95)$$

● 5. Векторний добуток двох колінеарних векторів є нуль-вектор: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Доведення. Маємо $\varphi = 0$, або $\varphi = \pi$. Оскільки $\sin 0 = \sin \pi = 0$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$, і тому $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. ●

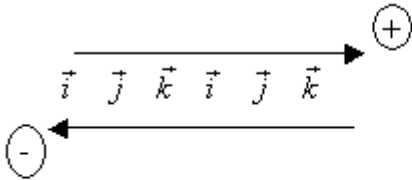


Рис 40

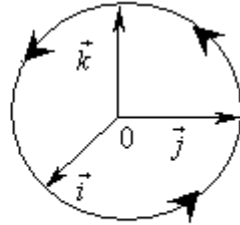


Рис. 41

● 6. Векторний добуток двох рівних векторів дорівнює нулю:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$$

Доведення. Оскільки $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{a} \right) = 0$, то $\sin \varphi = 0$, тоді $|\vec{a} \times \vec{a}| = 0$, отже $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

7.2.2. Векторний добуток ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

За означенням 52 і властивостями 1, 5 векторного добутку для ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис.35) дістанемо (табл.12):

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0, & \vec{j} \times \vec{j} &= 0, & \vec{k} \times \vec{k} &= 0, \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}, & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Таблиця 12

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Схематично табл.12 (формули (1.96)) зображена на рис.40, на якому векторний добуток ортів, записаних поруч зліва направо дорівнює наступному за ним орту зі знаком "+", а векторний добуток ортів, записаних поруч справа наліво дорівнює наступному за ними орту зі знаком "-".

Ще табл.12 (формули (1.96)) схематично можна подати у вигляді рис.41. Якщо перехід від першого співмножника до другого здійснюється проти руху годинникової стрілки, то результатом векторного добутку двох ортів є вектор,

який стоїть за ними, він береться зі знаком "+"; якщо перехід від першого співмножника до другого здійснюється за рухом годинникової стрілки, то результатом векторного добутку двох ортів є вектор, який стоїть за ними, він береться зі знаком "-".

7.2.3. Векторний добуток векторів, заданих координатами

Нехай

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = [\text{за властивістю 3 векторного} \\ \text{добутку}] &= x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \times \vec{j}) + \\ &+ y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k}) = [\text{за таблицею 12}] = \\ &= -y_1x_2\vec{k} + z_1x_2\vec{j} + x_1y_2\vec{k} - z_1y_2\vec{i} - x_1z_2\vec{j} + y_1z_2\vec{i} = \vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) - \vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \\ &+ \vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2) = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (1.97)$$

Права частина останньої рівності є розклад визначника третього порядку за елементами першого рядка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Отже

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (1.98)$$

Приклад № 57. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

▲ За формулою (1.98) маємо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 20\vec{j} + 2\vec{k} - 15\vec{k} - 4\vec{i} + 2\vec{j} = \\ &= -7\vec{i} + 22\vec{j} - 13\vec{k} = (-7; 22; -13). \quad \blacktriangledown\end{aligned}$$

Приклад № 58. Знайти:

1) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$.

▲ 1). Маємо

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} + \vec{k} + 4\vec{i} + 3\vec{j} = \\ &= 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} = (5; 1; 7), \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0, \quad \vec{b} \times \vec{b} = 0, \quad (2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = [\text{за властивістю 3} \\ \text{векторного добутку}] &= 2(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2 \cdot (5; 1; 7) = \\ &= (10; 2; 14). \quad \blacktriangledown\end{aligned}$$

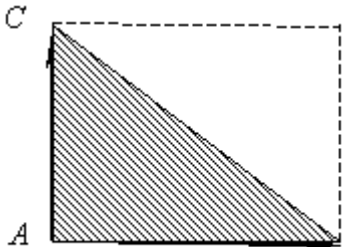


Рис. 42

▲ 2). Маємо $\vec{a} \times \vec{b} = (5; 1; 7)$, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\vec{b} \times \vec{b} = 0$. $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$

$B = [\text{за властивістю 3 векторного добутку}] =$

$$2\vec{a} \times 2\vec{a} - \vec{b} \times 2\vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} = [\text{за властивістю 2 векторного}$$

добутку] $= 4(\vec{a} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{b} \times \vec{b} = [\text{за властивостями 1, 6 векторного}$

$$\text{добутку}] = 4(\vec{a} \times \vec{b}) = 4 \cdot (5; 1; 7) = (20; 4; 28). \blacktriangledown$$

Приклад № 59. Знайти вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ та обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

$$1) \vec{a} = 3\vec{i}, \vec{b} = 2\vec{k}; \quad 2) \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\blacktriangle 1) \vec{a} = 3 \cdot \vec{i} = 3 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (3; 0; 0),$$

$$\vec{b} = 2\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (0; 0; 2), \text{ тоді, за формулою (1.98):}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{j} = (0; -6; 0),$$

$$S_{\text{пар.}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 6. \blacktriangledown$$

$$\blacktriangle 2) \vec{a} = (2; 3; 0), \vec{b} = (0; 3; 2),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{k} - 4\vec{j} = (6; -4; 6);$$

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{36 + 16 + 36} = 2\sqrt{22}. \blacktriangledown$$

7.3. Застосування векторного добутку

7.3.1. Обчислення площі

Оскільки $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{пар.}}$ (рис.36), а площа трикутника: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар.}}$,

$$\text{то} \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (1.99)$$

Зауваження. За формулою (1.99) можна обчислювати площі многокутників, поділяючи їх на трикутники.

Приклад № 60. Знайти площу трикутника з вершинами $A(3; 1; 2)$, $B(2; 2; 3)$, $C(4; 3; 2)$.

▲ Площа ΔABC (рис.42) дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах, наприклад, $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|. \text{ Маємо}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1; 2; 0), \quad \overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1). \text{ Тоді}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\vec{i} + \vec{k} + 2\vec{k} - \vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (2, -1, 3), \text{ звідки } |\vec{AC} \times \vec{AB}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

$$\text{Отже, } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \quad (\text{кв.од.}). \blacktriangledown$$

Приклад № 61. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 45^\circ$.

▲ Побудуємо вектори $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + 2\vec{b}$ (рис.43) з спільним

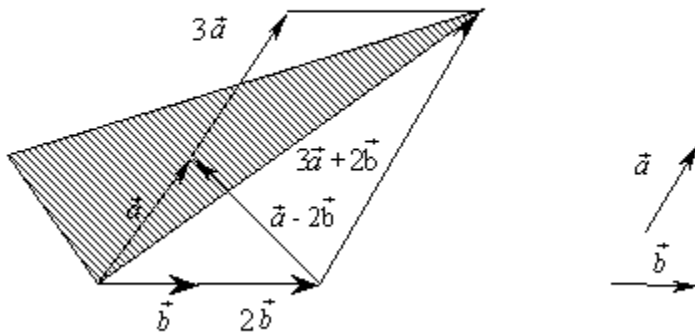


Рис. 43

початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З'єднаємо лінії побудованих векторів, дістанемо трикутник, площа якого дорівнює:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|.$$

Знаходимо векторний добуток:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \times 3\vec{a} - 2\vec{b} \times 3\vec{a} + \vec{a} \times 2\vec{b} - 2\vec{b} \times 2\vec{b} = 6(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 8(\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$\text{Тоді } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |8(\vec{a} \times \vec{b})| = 4 |\vec{a} \times \vec{b}| = 4 |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 45^\circ = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}.$$

$$\text{Отже } S_{\Delta} = 50\sqrt{2} \quad (\text{кв.од.}). \blacktriangledown$$

7.3.2. Обчислення моменту сили відносно точки

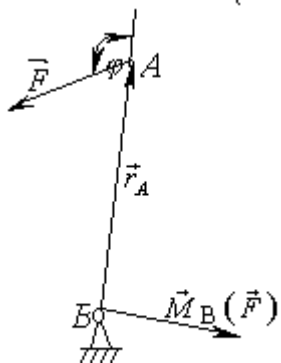


Рис.44

Означення 53. Моментом сили $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$, прикладеної до

точки A ,

відносно довільної точки B називається вектор (позначається: $\vec{M}_B(\vec{F})$),

що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}_A = B\vec{A} = (r_x; r_y; r_z)$ на вектор-сили $\vec{F}$ (рис.44):

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1.100)$$

Приклад № 62. Знайти момент сили $\vec{F} = (5; 6; -7)$, прикладеної до точки $A(1; 1; 1)$ відносно початку координат.

▲ $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{a} \times \vec{F}$, де $\vec{a} = \overline{OA} = (1; 1; 1)$. Тоді, за формулою (1.100), маємо

$$\vec{a} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} - 5\vec{k} - 6\vec{i} + 7\vec{j} = -13\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, $\vec{M}_0(\vec{F}) = (-13; 12; 1)$. ▼

Приклад № 63. Задано сили $\vec{F}_1 = (-3; -2; 4)$, $\vec{F}_2 = (5; -2; 3)$ і $\vec{F}_3 = (2; 6; -3)$, що діють на точку $M_1(3; 4; -5)$. Обчислити роботу цих сил по переміщенню прямолінійно точки M_1 в точку $M_2(4; 2; 1)$.

▲ Знайдемо рівнодійну $\vec{R}$ заданих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-3; -2; 4) + (5; -2; 3) + (2; 6; -3) = (4; 2; 4)$$

і вектор переміщення $\vec{S} = \overline{M_1 M_2}$: $\vec{S} = M_1 M_2 = (1; -2; 6)$.

Робота A дорівнює:

$$A = \vec{R} \cdot \vec{S} = 4 \times 1 + 2 \times (-2) + 4 \times 6 = 24. \quad \blacktriangledown$$

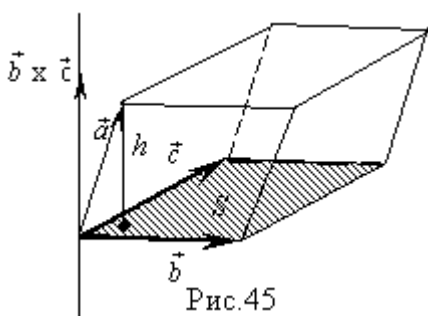


Рис.45

§ 8. МІШАНИЙ ДОБУТОК

Означення 54. **Мішаним добутком** трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (позначається: $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, або $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$).

Властивості:

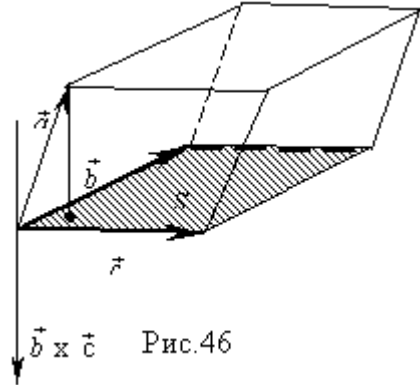
1. Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'єму V паралелепіпеда (рис.45), побудованого на цих векторах, якщо в'язка векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – права і $(-V)$, якщо в'язка – ліва; $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{cases} V, & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – права в'язка,} \\ -V, & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – ліва в'язка,} \\ 0, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарні.} \end{cases}$$

Отже,

Доведення. 1). Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi$ – компланарні.

1⁰. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.



2⁰. $\vec{a} \neq \vec{0}$, за означенням векторного добутку $\vec{b} \times \vec{c} \perp \vec{a}$. Тоді

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

3⁰. $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$, але $\vec{b} \parallel \vec{c}$, тоді $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, оскільки $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$.

Отже, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, то

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

2). Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні.

1⁰. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – права в'язка (рис.45). Тоді,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{b} \times \vec{c}| \text{Пр}_{\vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} = S h = V,$$

де $|\vec{b} \times \vec{c}| = S$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$; $\text{Пр}_{\vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} = h$ – висота паралелепіпеда. Отже, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = S \cdot h = V$. (1.101)

2⁰. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – ліва в'язка (рис.46), тоді $\vec{b} \times \vec{c}$ є вектор, протилежний вектору $\vec{b} \times \vec{c}$ в правій в'язці і $\text{Пр}_{\vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} = -h$. Тому

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = S \cdot (-h) = -V. \text{ Отже } |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = V_{\text{паралелепіпеда}}.$$

● 2. Мішаний добуток $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ не змінюється при коловій перестановці в ньому векторів: $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$



$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \vec{b} \vec{c}.$$

Доведення. Нехай $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, тоді $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$

[за формулою (1.97)] $= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot \left(\vec{i} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$ [за формулою (1.82)] $=$

$$\left(x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.102)$$

При коловій перестановці векторів в мішаному добутку рядки у визначнику (1.102) два рази замінюються між собою. За властивістю 2 визначників визначник (1.102) не змінюється. ●

8.1. Умова компланарності трьох векторів

З формули (1.102) випливає умова компланарності (лінійної залежності) трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta = 0,$$

оскільки, за властивістю 1 мішаного добутку $V=0$.

Приклад № 64. Знайти лінійну залежність векторів:

а) $\vec{a}=(1;2;3), \vec{b}=(2,-3,-4), \vec{c}=(0,-7,-10);$

б) $\vec{a}=(1,-1;0), \vec{b}=(2;1,-2), \vec{c}=(0,-1;2).$

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} = 30 - 42 - 28 + 40 = 0$

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4 = 4.$

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні. ▼

Приклад № 65. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на осі OY .

▲ Нехай $D(0; y; 0)$. Обчислимо V тетраедра за

формулою $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA})|, V = 5$ (за умовою). Знайдемо координати

векторів: $\overrightarrow{BC} = \{-1; -1; 2\}, \overrightarrow{BD} = \{-3; y; -1\}, \overrightarrow{BA} = \{-1; 1; -2\},$

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & y & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1 - 2y)\vec{i} - 5\vec{j} + (y - 3)\vec{k}.$$

Тоді за формулою скалярного добутку двох векторів, заданих координатами, маємо:

$$|\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA})| = |-1(1 - 2y) - 1(-5) + 2(y - 3)| = |4y - 2|$$

Оскільки $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA})| = 5$, то $|4y - 2| = 30$, або $\begin{cases} y = 8, \\ y = -7. \end{cases}$

Відповідь: $D_1(0; 8; 0), D_2(0; -7; 0)$. ▼

§ 9. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ. ВЛАСНІ ЧИСЛА І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Означення 55. Множина V називається **лінійним простором**, а її елементи - **векторами**, якщо вказано закон (правило), згідно з яким:

1) будь-якій парі векторів $\vec{x} \in V, \vec{y} \in V$ однозначно поставлено у відповідність вектор $\vec{z} \in V$, який позначається $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ і називається сумою векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$;

2) вектору $\vec{x} \in V$ і будь-якому числу λ (λ - дійсне, або комплексне) поставлено у відповідність вектор $\vec{z}$ із V , який позначається $\vec{z} = \lambda \vec{x}$ і називається добутком вектора (елемента) $\vec{x}$ на число λ .

При цьому введені дії додавання векторів і множення вектора на число задовольняють наступним аксіомам:

1) додавання комутативне: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;

2) додавання асоціативне: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;

3) в множині V існує елемент $\vec{0}$ (нульовий елемент, нуль-вектор) такий, що для будь-якого $\vec{x} \in V$:

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x},$$

4) для кожного елемента $\vec{x} \in V$ існує протилежний до нього елемент $(-\vec{x}) \in V$ такий, що

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0};$$

5) для будь-яких елементів $\vec{x}, \vec{y} \in V$ і будь-якого числа λ :

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y};$$

6) для будь-якого елемента (вектора) $\vec{x} \in V$ і будь-яких чисел α, β :
 $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;

7) $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$;

8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x} \in V$.

Зауваження. 1. Елементи $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ лінійного простору часто називають векторами, тому лінійний простір ще називають **векторним простором**.

2. Якщо в умові 2) число λ - дійсне, то простір V називається **дійсним лінійним простором**; якщо ж λ - комплексне число, то V називають **комплексним лінійним простором**.

Означення 56. Система елементів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ лінійного простору V називається **лінійно залежною**, якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не всі рівні нулю, і такі, що

$$\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \dots + \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}. \quad (1.105)$$

Якщо (1.105) виконується тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система елементів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ називається **лінійно незалежною**.

Означення 57. Лінійний простір V називається n -вимірним, якщо він має n лінійно незалежних векторів (позначається: $R^n(V^n)$).

● **Теорема 15.** Система елементів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ ($n \geq 2$) лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з її елементів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших.

Доведення. Нехай система $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ лінійно залежна і $\alpha_k \neq 0$. Тоді

$$\overline{x_k} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \overline{x_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \overline{x_2} - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \overline{x_{k-1}} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \overline{x_{k+1}} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \overline{x_n}, \quad (1.106)$$

тобто елемент $\overline{x_k}$ є лінійною комбінацією елементів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{k-1}}, \overline{x_{k+1}}, \dots, \overline{x_n}$.

Навпаки, нехай, наприклад, $\overline{x_i}$ є лінійною комбінацією інших елементів системи:

$$\overline{x_i} = \lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + \dots + \lambda_{i-1} \overline{x_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overline{x_{i+1}} + \dots + \lambda_n \overline{x_n}, \quad \text{тоді}$$

$$\lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + \dots + (-1) \overline{x_i} + \dots + \lambda_n \overline{x_n} = \overline{0}.$$

Тут є відмінний від нуля коефіцієнт $\lambda_i = -1 \neq 0$, отже, система лінійно залежна. ●

Означення 58. Будь-яка впорядкована система n -лінійно незалежних елементів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ лінійного n -вимірного простору $R^n(V^n)$ називається **базисом** цього простору.

Нехай $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - довільний базис простору V^n . Тоді для кожного $\overline{x} \in V^n$ знайдеться набір чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ такий, що

$$\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \overline{e_i}.$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають **координатами** елемента (вектора) $\overline{x}$ в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$. Інакше координати $\overline{x}$ в цьому базисі ще записують у вигляді координат стовпця

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в просторі V^n вибрати інший базис, то координати вектора $\vec{x}$ також зміняться.

Нехай $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \vec{e}_i$. Тоді $\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \cdot \vec{e}_i$

для будь-якого числа λ : $\lambda \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) \cdot \vec{e}_i$.

Нехай $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ і $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ - два базиси лінійного простору V^n . Розкладемо елементи базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ за базисом $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$, маємо

$$\vec{e}_i = z_{i1}\vec{e}'_1 + z_{i2}\vec{e}'_2 + \dots + z_{in}\vec{e}'_n = \sum_{j=1}^n z_{ij}\vec{e}'_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.107)$$

Або в матричній формі:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$S = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

називається **матрицею переходу** від базису $\vec{e}$ до базису $\vec{e}'$.

Означення 59. Множину векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ називають **ортогональною**, якщо всі ці вектори ортогональні (перпендикулярні) попарно один до одного

і жоден не є нуль-вектором, тобто $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ де $\vec{e}_i \neq 0, \quad \vec{e}_j \neq 0; i = \overline{1, n}$.

Зауваження. Ортогональна система векторів завжди лінійно незалежна.

9.1. Лінійні перетворення лінійного простору

Нехай V - лінійний простір.

Означення 60. **Лінійним перетворенням** лінійного простору називається правило A , згідно з яким кожному елементу $\vec{x} \in V$ ставиться у відповідність елемент $\vec{y} = A\vec{x}$ ($A\vec{x} \in V$ - єдиний) так, що:

$$1. A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2;$$

$$2. A(\alpha \vec{x}) = \alpha A \vec{x}, \quad \alpha \in R.$$

Позначається лінійне перетворення $A: V \rightarrow V$.

Означення 61. Лінійне перетворення $E: V \rightarrow V$, що задається за правилом $E \vec{x} = \vec{x}$, для будь-якого $\vec{x} \in V$, називається **тотожнім**.

9.1.1. Дії над лінійними перетвореннями

Нехай A і B - довільні лінійні перетворення в лінійному просторі V , α - довільне дійсне число, $\vec{x} \in V$ - будь-який елемент (вектор).

Сумою лінійних перетворень A і B називається перетворення C (позначається $C = A + B$), $C: V \rightarrow V$, що визначається рівністю $C \vec{x} = A \vec{x} + B \vec{x}$.

Добутком лінійного перетворення A на число α називається перетворення $D: V \rightarrow V$ (позначається $D = \alpha A$), що визначається рівністю $D \vec{x} = \alpha A \vec{x}$.

Перетворення C і D - лінійні.

Добутком лінійного перетворення A на лінійне перетворення B називається перетворення $C_1: V \rightarrow V$ (позначається: $C_1 = AB$), що визначається рівністю $C_1 \vec{x} = B(A \vec{x})$.

Перетворення C , D , C_1 - лінійні.

9.1.2. Матриця лінійного перетворення

Нехай $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ - базис лінійного n -вимірного простору V^n , $A: V \rightarrow V$ - лінійне перетворення. Оскільки $A \vec{e}_i$, $i = \overline{1, n}$ - вектори простору V^n , то

$$A \vec{e}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot \vec{e}_k = a_{1i} \cdot \vec{e}_1 + a_{2i} \cdot \vec{e}_2 + \dots + a_{ni} \cdot \vec{e}_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Вектори $A \vec{e}_i$ можна розкласти за векторами базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ єдиним способом. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є коефіцієнти в формулах перетворення A базисних векторів, називається матрицею лінійного перетворення в базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Нехай $\vec{y} = A \vec{x}$. Розкладемо $\vec{x}$ і $\vec{y}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \vec{e}_i$. Координатні стовпці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ зв'язані між собою співвідношенням: $Y = A \cdot X$, де A - матриця лінійного перетворення A , тобто

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Означення 62. Лінійне перетворення $H: V \rightarrow V$ називається **оберненим** по відношенню до лінійного перетворення $A: V \rightarrow V$ (позначається: $H = A^{-1}$), якщо справджуються наступні рівності:

$$H \circ A = A \circ H = E,$$

де: $E: V \rightarrow V$ - тотожне перетворення.

Зауважимо, що обернене перетворення існує не завжди.

Матриця A^{-1} лінійного перетворення A^{-1} є оберненою до матриці A і визначається за формулою (1.30).

Теорема 16. Матриці A і A' лінійного перетворення $A: V \rightarrow V$ відносно базисів $\vec{e}$ і $\vec{e}'$ простору V пов'язані співвідношенням:

$$A' = S^{-1} A S, \quad (1.109)$$

де S - матриця (1.108) переходу від базису $\vec{e}$ до базису $\vec{e}'$.

Наслідок. Визначник матриці лінійного перетворення не залежить від вибору базису:

$$\det A = \det A'.$$

Приклад № 66. Лінійне перетворення в базисі $\vec{e}$: $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю A' в базисі $\vec{e}'$: $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = 4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$.

▲ Матриця переходу S від базису $\vec{e}$ до базису $\vec{e}'$ має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Її визначник:

$$|S| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 7 + 36 + 8 - 42 - 18 = 1 \neq 0,$$

отже існує матриця S^{-1} . Обчислимо алгебраїчні доповнення S_{ij} до елементів матриці S :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 12 - 21 = -9, & S_{12} &= -(18 + 7) = -25, & S_{13} &= 9 + 2 = 11, \\ S_{21} &= -(6 - 12) = 6, & S_{22} &= 12 + 4 = 16, & S_{23} &= -(6 + 1) = -7, \\ S_{31} &= 7 - 8 = -1, & S_{32} &= -(14 - 12) = -2, & S_{33} &= 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Тоді

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -1 \\ -25 & 16 & -2 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix},$$

а

$$\begin{aligned} A' &= S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -1 \\ -25 & 16 & -2 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -11 & -21 \\ 19 & -28 & -60 \\ -8 & 13 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -78 & -175 \\ 14 & -217 & -480 \\ -3 & 96 & 215 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.2. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення

Нехай $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ - матриця лінійного перетворення A в деякому базисі $\vec{e}$. Многочлен від λ : $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

називається **характеристичним многочленом** матриці A (лінійного оператора A). Його корені λ_i , $i = \overline{1, n}$ називаються **власними числами** (власними значеннями або характеристичними коренями) матриці A . Рівняння $|A - \lambda E| = 0$ називається **характеристичним рівнянням**.

Ненульовий вектор (елемент) $\vec{x} \in V^n$ називається **власним вектором** (елементом) лінійного перетворення $A: V^n \rightarrow V^n$, якщо існує таке число λ - власне число лінійного перетворення A , що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Власний вектор $\vec{x}^{(i)}$, що відповідає власному числу λ_i є будь-який вектор $\vec{x}^{(i)} = x_1^i \vec{e}_1 + x_2^i \vec{e}_2 + \dots + x_n^i \vec{e}_n$, координати якого задовольняють систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i) x_1^i + a_{12} x_2^i + \dots + a_{1n} x_n^i = 0, \\ a_{21} x_1^i + (a_{22} - \lambda_i) x_2^i + \dots + a_{2n} x_n^i = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} x_1^i + a_{n2} x_2^i + \dots + (a_{nn} - \lambda_i) x_n^i = 0, \end{cases} \quad (1.110)$$

або в матричному вигляді $(A - \lambda E) \overline{x^{(i)}} = \vec{0}$.

Приклад № 67. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення заданого в деякому базисі матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$\begin{aligned} (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) &= 0, \\ (1-2\lambda+\lambda^2)(5-\lambda) + 6 - 45 + 9\lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda &= 0, \\ 5 - 10\lambda + 5\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 41 + 11\lambda &= 0, \\ \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0, \quad (\lambda^3 + 2\lambda^2) - (9\lambda^2 - 36) &= 0, \\ \lambda^2(\lambda + 2) - 9(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0, \quad (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) &= 0, \\ \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6. \end{aligned}$$

Отже, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ - власні числа матриці A .

Власний вектор $\overline{x^{(I)}}$, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -2$, визначаємо із системи (1.110):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_1 = -7x_2 - x_3, \\ 3(-7x_2 - x_3) + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -7x_2 - x_3, \\ -20x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = -x_3. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = \alpha$, тоді $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, $\overline{x^{(I)}} = (-1, 0, 1)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. сукупність власних векторів, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -2$.

2 (-3)

Якщо $\lambda_2 = 3$, то система, з якої визначається відповідний власний вектор $\overline{x^{(2)}}$, набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} \oplus \\ \oplus \end{pmatrix} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + 5x_3 = 0, \\ -5x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \beta, \\ x_1 = \beta, \\ x_2 = -\beta, \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\overline{x^{(3)}} = (1; -1; 1) \cdot \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ - сукупність власних векторів, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$.

Аналогічно знайдемо вектор $\overline{x^{(3)}}$, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 6$ з системи рівнянь:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ -5x_2 + 5x_3 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 + x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = 2x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \gamma, \\ x_2 = 2\gamma, \\ x_1 = \gamma, \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\overline{x^{(3)}} = (1; 2; 1) \cdot \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. ▼

§10. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ.

ЗВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИДУ

Вираз виду $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot x_i x_j$, де $a_{ij} = a_{ji}$, називається **квадратичною формою** від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ і позначається:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i x_j. \quad (1.111)$$

Симетрична матриця, яка складена з коефіцієнтів a_{ij} квадратичної форми, називається **матрицею квадратичної форми**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{де } a_{ij} = a_{ji}.$$

Наприклад, матриця A квадратичної форми $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2 x_3 - 6x_1 x_2 - 8x_1 x_3$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Означення 63. Квадратична форма f від n дійсних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається **додатньо (від'ємно) визначеною**, якщо при будь-яких дійсних значеннях x_i , хоча б одне з яких відмінне від нуля, форма набуває тільки додатних (від'ємних) значень.

Критерій Сільвестра (додатньої визначеності квадратичної форми). Для того щоб квадратична форма була додатньо визначена, необхідно і достатньо, щоб всі її "кутові мінори" матриці A були додатні, тобто щоб мали місце нерівності

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det A > 0.$$

Зауваження 1. Для того, щоб квадратична форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ була від'ємно визначена, необхідно і достатньо, щоб квадратична форма $(-f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ була додатньо визначена, а отже, всі її "кутові мінори", тобто

$$-a_{11}, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \det(-A)$$

були додатні. Це означає, що

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

тобто знаки "кутових мінорів" матриці A чергуються, починаючи зі знака "-".

Приклад № 68. Визначити, які квадратичні форми додатньо чи від'ємно визначені, а які ні:

а) $f = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $f = 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$;

в) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

▲ а)

$$\Delta_1 = 9 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 54 - 36 = 18 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 324 + 30 + 30 - 150 - 9 - 216 = 9 > 0,$$

отже, квадратична форма додатньо визначена.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

б) - матриця квадратичної форми.

$$\Delta_1 = -11 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 66 - 36 = 30 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ -5 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -90 + 99 - 90 = -81 < 0,$$

отже, квадратична форма від'ємно визначена.

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -19 < 0,$$

$\Delta_3 = |A| = -6 - 6 + 15 - 9 = -6 < 0$, отже, квадратична форма загального типу. ▼

Зауваження 2. Додатня (від'ємна) визначеність квадратичної форми застосовується при дослідженні на екстремум функції багатьох змінних.

Приклад № 69. При яких значеннях параметра λ квадратична форма $f = \lambda x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1 x_2 - 2x_2 x_3$ додатньо визначена?

$$\text{▲ } A = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \lambda > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = |A| = 4\lambda - \lambda - \lambda^2 > 0.$$

$$\begin{cases} \lambda > 0, \\ 4\lambda - \lambda^2 > 0, \\ 3\lambda - \lambda^2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda^2 - 4\lambda < 0, \\ \lambda^2 - 3\lambda < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda > 0, \\ \lambda(\lambda - 4) < 0, \\ \lambda(\lambda - 3) < 0, \end{cases} \quad 0 < \lambda < 3. \quad \text{▼}$$

Нехай в деякому базисі вираз (1.111) квадратичної форми не містить добутоків $x_i x_j$ ($i \neq j$), тобто має вигляд

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i^2. \quad (1.112)$$

Вираз (1.112) називається **канонічним виглядом** квадратичної форми.

Для кожної квадратичної форми існує базис, в якому вона має канонічний вигляд.

Методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду:

- 1) метод Лагранжа виділення повних квадратів;
- 2) метод власних векторів.

Приклад № 70. Звести квадратичну форму $f(x, y, z) = 4xy + 4yz + 4zx$ до канонічного вигляду.

▲ Застосуємо метод власних векторів. Складемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

та побудуємо її характеристичний многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad -\lambda^3 + 8 + 8 + 4\lambda + 4\lambda + 4\lambda = 0; \quad \lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0.$$

Знайдемо корені цього многочлена: $\lambda_1 = 4$. Тоді $\lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda^3 - 4\lambda^2) + (4\lambda^2 - 16\lambda) + (4\lambda - 16) = \lambda^2(\lambda - 4) + 4\lambda(\lambda - 4) + 4(\lambda - 4) = (\lambda - 4)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0$, звідки $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, тобто $(\lambda + 2)^2 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Отже, $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2$ - канонічний вигляд заданої квадратичної форми. ▼

Зауваження. Побудова відповідного базису є задачею складнішою.

Алгоритм побудови базису для довільної квадратичної форми, в якому квадратична форма має діагональний вигляд:

- 1) записати матрицю квадратичної форми;
- 2) побудувати характеристичний многочлен та знайти його корені;
- 3) нехай λ_1 - один з коренів кратності k . Тоді однорідна лінійна система

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

має k лінійно незалежних розв'язків. Знаходимо їх ортонормовані розв'язки.

- 4) так діємо для кожного λ .
- 5) в побудованому ортобазисі задана квадратична форма має діагональний вигляд.

Приклад № 71. Звести до канонічного виду квадратичну форму

$$f = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

▲ 1. Матриця квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння (приклад № 67):

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним числам λ_i . Якщо $\lambda_1 = -2$, то система (1.113) для даної квадратичної форми матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 - 3x_3, \\ x_1 - 21x_1 - 21x_3 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_1 - 3x_3 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = \alpha, \\ x_1 = -\alpha, \quad \alpha \in R, \end{cases}$$

тобто власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -2$ є

$$\vec{X}^{(1)} = (-1; 0; 1) \cdot \alpha, \quad \alpha \in R \quad \text{або} \quad \vec{X}^{(1)} = \alpha(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3), \quad \alpha \in R.$$

Якщо $\lambda_2 = 3$, то система (1.113) має вигляд:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знайдемо:
$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3x_3, \\ x_1 + 4x_1 - 6x_3 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_1 - 3x_3 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Покладемо $x_3 = \beta$, $\beta \in R$, тоді $x_1 = \beta$, $x_2 = -\beta$.

Тоді $\vec{X}^{(2)} = \beta(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $\beta \in R$.

При $\lambda_3 = 6$ маємо:
$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ -5x_2 + 5x_3 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 + x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$
 звідки

$$\begin{cases} x_2 = 2x_3, \\ x_1 = x_3, \\ 0 \cdot x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \gamma, \\ x_2 = 2\gamma, \\ x_1 = \gamma. \end{cases} \quad \gamma \in R.$$

Отже, $\vec{X}^{(3)} = \gamma(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $\gamma \in R$.

Пронормуємо вектори $\vec{X}^{(i)}$, $i = \overline{1,3}$. $|\vec{X}^{(1)}| = \sqrt{2}\alpha$, $|\vec{X}^{(2)}| = \sqrt{3}\beta$, $|\vec{X}^{(3)}| = \sqrt{6}\gamma$.

Нормовані власні вектори:

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{|\vec{X}^{(1)}|} \cdot \vec{X}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3);$$

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

Матриця переходу від ортонормованого базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ до ортонормованого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} f &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right)^2 + 5 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3 \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right)^2 + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right) \times \\ &\times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3 \right) + 6 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right) + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3 \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3 \right) = \frac{1}{3} (x'_2)^2 - \frac{2}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 + \frac{1}{2} (x'_1)^2 + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 \right) + \frac{1}{6} (x'_3)^2 + 5 \left(\frac{2}{3} (x'_3)^2 - \frac{4}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 + \right. \\ &+ \frac{1}{3} (x'_2)^2) + \frac{1}{2} (x'_1)^2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 + \frac{1}{3} (x'_2)^2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{6} (x'_3)^2 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 - \frac{1}{3} (x'_2)^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} x'_1 x'_3 + \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 + \right. \\ &+ \frac{1}{3} (x'_3)^2) + 6 \left(-\frac{1}{2} (x'_1)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_2 x'_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x'_3 x'_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 + \frac{1}{3} (x'_2)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} x'_1 x'_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 + \frac{1}{6} (x'_3)^2) + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} x'_1 x'_3 - \frac{1}{3} (x'_2)^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 + \frac{1}{3} (x'_3)^2) = \\ &= \frac{2}{3} (x'_2)^2 + (x'_1)^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} x'_3 x'_1 + \frac{1}{3} (x'_3)^2 + \frac{10}{3} (x'_3)^2 - \\ &- \frac{20}{3\sqrt{2}} x'_2 x'_3 + \frac{5}{3} (x'_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_3 x'_1 + \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} x'_1 x'_2 - \frac{2}{3} (x'_2)^2 + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 - \frac{2}{\sqrt{3}} x'_1 x'_3 + \frac{2}{3} (x'_3)^2 - 3(x'_1)^2 + \sqrt{3} x'_3 x'_1 + 2(x'_2)^2 + \\ &+ \frac{4}{\sqrt{2}} x'_2 x'_3 - \sqrt{3} x'_3 x'_1 + (x'_3)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} x'_1 x'_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} x'_1 x'_3 - \frac{2}{3} (x'_2)^2 + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{2}} x'_3 x'_2 + \frac{2}{3} (x'_3)^2 = -2(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 6(x'_3)^2. \end{aligned}$$

Отже, канонічний вигляд квадратичної форми:

$$\tilde{f} = -2(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 6(x'_3)^2. \quad \blacktriangledown$$

Метод зведення квадратичної форми до канонічного вигляду, який застосований у попередньому прикладі, називається **методом власних векторів**.

Існує інший метод зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Він називається **метод Лагранжа виділення повних квадратів**.

Приклад № 72. Методом Лагранжа звести до канонічного вигляду квадратичну форму $f = -x^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_3^2$.

▲ $f = -x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_3^2 = -(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) + x_1^2 + 4x_1x_3 - 8x_3^2 = -(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2) - 12x_3^2 = -(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 - 12x_3^2$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x'_1, \\ x_1 + 2x_3 = x'_2, \\ x_3 = x'_3, \end{cases} \quad \text{тоді } f = -(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - 12(x'_3)^2 \text{ - канонічний вигляд квадратичної форми.} \blacktriangledown$$

Метод власних векторів і власних чисел застосовується для зведення загального рівняння кривих другого порядку (Розділ II, §4) (квадратичної форми цього рівняння) до канонічного виду.

Приклад № 73. Звести рівняння

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36. \quad (1.114)$$

до канонічного виду.

▲ Складемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0, \quad \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0, \quad \begin{cases} \lambda_1 = 9, \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Якщо $\lambda_1 = 9$, то система для визначення відповідного власного вектора $\overline{X_1}$, набуде вигляду:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \quad x_2 = 2x_1;$$

$$\overline{X_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 / \sqrt{5}x_1 \\ 2x_1 / \sqrt{5}x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, якщо $\lambda_2 = 4$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases} x_1 = -2x_2$; $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ - матриця перетворення координат: поворот системи координат на кут α , де $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (Розділ II, §3).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} X - \frac{2}{\sqrt{5}} Y, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} X + \frac{1}{\sqrt{5}} Y. \end{cases} \quad (1.115)$$

Підставимо (1.115) в (1.114):

$$\begin{aligned} 5 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (X - 2Y) \right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (X - 2Y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (2X + Y) + 8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2X + Y) \right)^2 &= 36; \\ X^2 - 4XY + 4Y^2 + \frac{4}{5} (2X^2 - 4XY + XY - 2Y^2) + \frac{8}{5} (4X^2 + 4XY + Y^2) &= 36; \\ X^2 \left(1 + \frac{8}{5} + \frac{32}{5} \right) + XY \left(-4 - \frac{12}{5} + \frac{32}{5} \right) + Y^2 \left(4 - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} \right) &= 36; \\ 9X^2 + 4Y^2 = 36, \quad \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1 &- \text{канонічне рівняння еліпса (Розділ II, § 4).} \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Приклад № 74. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку:

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0. \quad (1.116)$$

▲ Квадратична форма $f = 6xy + 8y^2$ має матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad -8\lambda + \lambda^2 - 9 = 0; \\ \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0, \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 9 \end{cases} &- \text{власні числа матриці } A. \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 9$: $\begin{cases} -9x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \end{cases} x_2 = 3x_1$, $\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$, $|\vec{X}^{(1)}| = \sqrt{10} x_1$; $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ - власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 9$.

$$\lambda_2 = -1: \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 = 0, \end{cases} \quad x_1 = -3x_2, \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{X}^{(2)}| = \sqrt{10} x_2; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{10} \\ 1 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Лінійне перетворення:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(X - 3Y), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3X + Y). \end{cases} \quad (1.117)$$

Підставимо (1.117) в (1.116):

$$\begin{aligned} & 6(X - 3Y)(3X + Y) \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} (3X + Y)^2 - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (X - 3Y) - \\ & - 26 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (3X + Y) + 11 = 0, \\ & 0,6(3X^2 - 8XY - 3Y^2) + 0,8(9X^2 + 6XY + Y^2) - \frac{12}{\sqrt{10}} X + \frac{36}{\sqrt{10}} Y - \\ & - \frac{78}{\sqrt{10}} X - \frac{26}{\sqrt{10}} Y + 11 = 0; \\ & X^2(1,8 + 7,2) + XY(-4,8 + 4,8) + Y^2(-1,8 + 0,8) - \frac{90}{\sqrt{10}} X + \frac{10}{\sqrt{10}} Y + 11 = 0; \\ & 9X^2 - Y^2 - 9\sqrt{10}X + \sqrt{10}Y + 11 = 0, \\ & 9\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{10}{4}\right) - \left(Y^2 - 2 \cdot Y \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{10}{4}\right) - \frac{90}{4} + \frac{10}{4} + 11 = 0, \\ & 9\left(X - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(Y - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X - \frac{\sqrt{10}}{2} = \tilde{x}, \\ Y - \frac{\sqrt{10}}{2} = \tilde{y}, \end{cases} \quad \text{- формули паралельного перенесення осей.}$$

$$9\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 9, \quad \tilde{x}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1 \quad \text{- канонічне рівняння гіперболи (Розділ II, §4) . } \blacktriangledown$$

РОЗДІЛ 2.

Основи аналітичної геометрії.

Предметом аналітичної геометрії є дослідження геометричних форм евклідового простору за допомогою алгебри. Прийmemo за елементарну геометричну форму *геометричну точку*. Тоді геометричні форми: лінії, площини, поверхні, фігури, тіла є множина геометричних точок (геометричне місце точок).

Отже, між геометричними формами і алгебраїчними рівняннями відносно координат (x, y) , або (x, y, z) їх множини геометричних точок в базисах системи координат устанавлюється взаємно однозначна відповідність.

Основою предмета аналітичної геометрії є *метод координат*. Творцями аналітичної геометрії є французькі математики П'єр Ферма (1601–1665), який виклав метод координат і застосував його до геометрії, довівши рівняння прямої та кривих 2-го порядку в праці "Вступ до теорії плоских і просторових місць" (1636), і Рене Декарт (1596–1650), який в праці "Геометрія" (1637) виклав основи методу аналітичної геометрії. Метод координат сприяв швидкому розвитку механіки, фізики та техніки.

Оскільки в аналітичній геометрії між геометричними формами і їх рівняннями відносно координат в базисах системи координат існує взаємно однозначна відповідність, то в ній розглядають дві взаємно обернені задачі:

1) задана геометрична форма, довести її рівняння, використовуючи спільну властивість множини геометричних точок геометричної форми; 2) задано рівняння геометричної форми, довести її геометричні властивості, виходячи з дослідження властивостей рівняння.

В аналітичній геометрії розглядаємо геометричні форми 1-го порядку: прямі та площини і геометричні форми 2-го порядку: криві лінії та поверхні, яким відповідають рівняння першого степеня і рівняння другого степеня відносно невідомих – координат (x, y) і (x, y, z) точок геометричних форм.

§ 1. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

1.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 в заданому напрямі $\vec{v}$

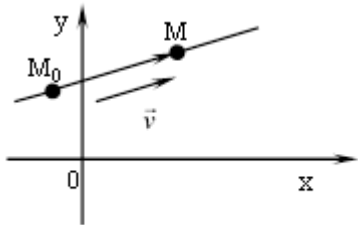


Рис. 47

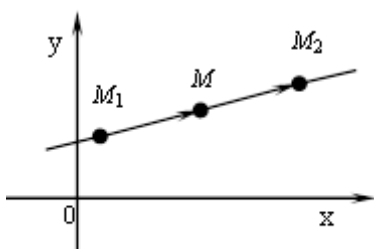


Рис. 48

Нехай $M_0(x_0; y_0) \in l$, $M(x, y) \in l$ – змінна точка прямої l (рис. 47), $l \parallel \vec{v}(m, n)$ – напрямний вектор прямої l .

Тоді (рис. 47) $\vec{v} \parallel \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

(2.1)

– це **канонічне** рівняння прямої.

1.2. Параметричні рівняння прямої

З (2.1) маємо $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t$ (t – параметр, $-\infty < t < \infty$).

Звідси дістаємо **параметричні** рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \quad (2.2)$$

1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма $M_1M_2 = l$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M(x, y) \in l$ (рис. 48).

Тоді $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Оскільки $\vec{v} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, то шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.3)$$

Приклад №1. Через точки $M_1(-1; 2)$ і $M_2(2; 3)$ проведена пряма. Визначити точки перетину цієї прямої з осями координат.

▲ З (2.3) дістанемо рівняння прямої $l = M_1M_2$:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2}, \text{ або } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1}, \text{ звідки } x - 3y + 7 = 0.$$

Маємо $A(x, 0) = l \cap OX$, $A(-7; 0)$ і $B(0, y) = l \cap OY$, $B(0; 7/3)$. ▼

1.4. Загальне рівняння прямої

● **Теорема.** У системі координат з базисом $(0; \vec{i}; \vec{j})$ між прямою l і лінійним рівнянням $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}$ відносно змінних x, y – координат $(x, y) \in l$ існує взаємно однозначна відповідність.

Доведення. Необхідність.

У базисі $(0; \vec{i}; \vec{j})$ пряма l визначається однозначно нормаллю $\vec{n} = (A; B)$, $\vec{n} \perp l$, і точкою $M_0(x_0; y_0) \in l$; $M(x, y) \in l$ – змінна точка прямої.

Тоді $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0,$$

де $C = -Ax_0 - By_0$. Отже, $l \Rightarrow Ax + By + C = 0$

(рис.49).

Достатність. $Ax + By + C = 0 \Rightarrow l$. Оскільки $A^2 + B^2 \neq 0$, то існує

вектор $\vec{n} = (A; B) \neq 0$. Нехай x_0, y_0 – один з розв'язків заданого рівняння: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Тоді рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, де x, y – довільний розв'язок цього рівняння, еквівалентне даному рівнянню. За необхідністю теореми рівняння

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ є пряма $l \perp \vec{n}$, тому еквівалентне йому рівняння $Ax + By + C = 0$ є пряма l .

Отже, $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow l$. ●

Рівняння $Ax + By + C = 0$ є **загальне рівняння прямої** в системі координат з базисом $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

Дослідження загального рівняння прямої.

1). $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$. Тоді

$$Ax + By = 0 \quad (2.4)$$

є рівняння прямої, що проходить через початок координат. Маємо $\vec{n} = (A; B)$.

Позначимо $(\vec{n}, \hat{OX}) = \alpha$, $(\vec{n}, \hat{OY}) = \beta$, $(l, \hat{OX}) = \varphi$ – кут нахилу прямої l до осі OX (рис.50). Тоді за формулою (1.66)

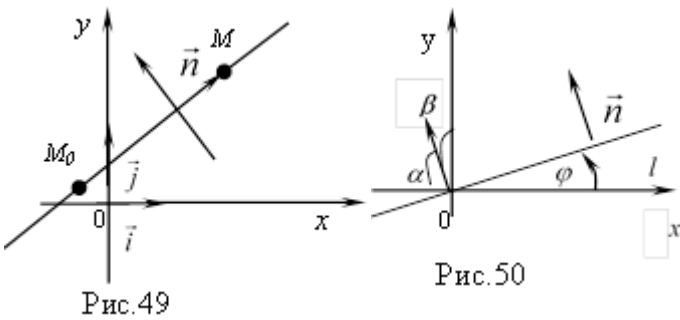


Рис.49

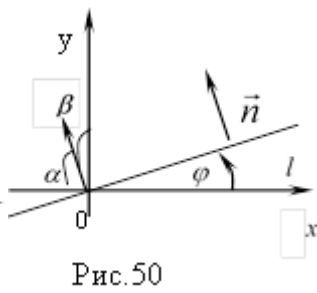


Рис.50

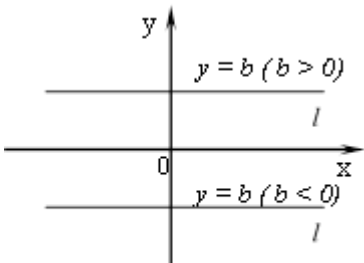


Рис.51

$$\cos \alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Звідси $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-A}{B}$. Оскільки $\varphi = 90^\circ - \alpha$,

то $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{-A}{B}$, або $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-A}{B}$, якщо $B \neq 0$.

Означення 1. Кутовим коефіцієнтом прямої (позначається: $\operatorname{tg} \varphi = k$) називається тангенс кута нахилу цієї прямої до осі OX .

Отже, $y = kx$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат, з заданим її кутовим коефіцієнтом.

2). $A = 0$ ($-\infty < x < \infty$), $B \neq 0$. Маємо

$$By + C = 0, \quad (2.5)$$

або $y = b$ де $b = -\frac{C}{B}$. Отже, пряма $l \parallel OX$, $\vec{n} = (0, B)$, $k = 0$ (рис.51).

3). $A \neq 0$, $B = 0$ ($-\infty < y < \infty$). Маємо $(\operatorname{tg} \varphi \neq \frac{-A}{B})$

$$Ax + C = 0, \quad (2.6)$$

або $x = a$, де $a = -\frac{C}{A}$. Отже $l \parallel OY$, $\vec{n} = (A, 0)$.

4). $A \neq 0$, $B = 0$ ($-\infty < y < \infty$), $C = 0$. Маємо $Ax = 0$, або $x = 0$ – рівняння осі ординат.

5). $A = 0$ ($-\infty < x < \infty$), $B \neq 0$, $C = 0$. Маємо $y = 0$ – рівняння осі абсцис.

6). $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Тоді $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$. Позначимо $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$,

маємо $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої l у відрізках на координатних осях, де $(a, 0) = l \cap OX$, $(0, b) = l \cap OY$.

$$\begin{aligned} & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ & \text{З рівняння} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \text{ оскільки } \frac{A}{B} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ то маємо } y = kx + b, \quad (2.8)$$

де $-\operatorname{tg} \varphi = k$, $-\frac{C}{B} = b$. Рівняння (2.8) – рівняння прямої l з заданим кутовим коефіцієнтом k і ординатою $b = l \cap OY$.

1.5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай $M_0(x_0; y_0) \in l$ – задана точка. Тоді з (2.8)

$$y_0 = k x_0 + b. \quad (2.9)$$

З рівнянь (2.8) і (2.9) маємо шукане рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.10)$$

Формула кутового коефіцієнта прямої

Нехай $M_1(x_1; y_1), M_0(x_0; y_0) \in l$. Тоді за формулою (2.10) маємо $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$, $y_1 \neq y_0$, $l \parallel OY$, звідки

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \quad (2.11)$$

Приклад №2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 3)$ і утворює з додатним напрямом осі OX кут 60° .

▲ Рівняння шуканої прямої запишемо у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Оскільки $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, то маємо

$$y - 3 = \sqrt{3}(x - 2),$$

або $\sqrt{3}x - y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$. ▼

Приклад №3. Задано $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$ – середини сторін трикутника. Знайти рівняння його сторін.

▲ Нехай $\triangle ABC$ – шуканий, $M_1 \in AB$, $M_2 \in BC$, $M_3 \in AC$; $M_1M_3 \parallel BC$, $M_1M_2 \parallel AC$, $M_2M_3 \parallel AB$.

Складемо рівняння прямих M_1M_3 , M_1M_2 , M_2M_3 відповідно:

$$1) \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-5}, \quad \vec{S}_1 = (1; -5);$$

$$2) \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{3-1}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2}, \quad \vec{S}_2 = (3; 2);$$

$$3) \frac{x-5}{3-5} = \frac{y-3}{-4-3}, \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{7}, \quad \vec{S}_3 = (2; 7)$$

Пряма BC проходить через точку M_2 паралельно до прямої M_1M_3 , напрямний вектор $\vec{s}_1$ якої має координати $\vec{s}_1 = (1; -5)$. За формулою (2.1) дістанемо рівняння сторони BC :

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-5}, \text{ або } 5x + y - 28 = 0.$$

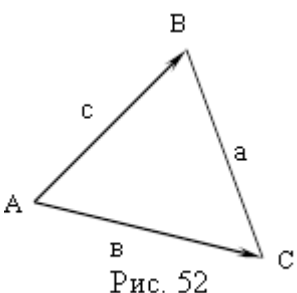
Аналогічно складемо рівняння інших сторін трикутника:

$$(AB): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7}, \text{ або } 7x - 2y - 12 = 0;$$

$$(AC): \frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{2}, \text{ або } 2x - 3y - 18 = 0. \blacktriangledown$$

Незручність рівняння (2.10) полягає в тому, що воно не має смислу,

коли пряма паралельна до осі ординат ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \varphi$ не існує).



§ 2. КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ.

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ. УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМИХ

2.1. Перетин двох прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Координати точки $M(x, y) = l_1 \cap l_2$ перетину прямих l_1 і l_2 є розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases}$$

якщо $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Якщо $\Delta = 0$, а $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (система не має розв'язків), то

$l_1 \parallel l_2$, якщо $\Delta = 0$, а $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (система неозначена), то прямі збігаються.

Приклад № 4. Сторони трикутника лежать на прямих:

$$x + 5y - 7 = 0, \quad 3x - 2y - 4 = 0, \quad 7x + y + 19 = 0.$$

Обчислити його площу.

▲ Нехай ΔABC – трикутник, площу якого треба обчислити (рис.52), перше рівняння є пряма AB , друге – пряма BC і третє – пряма AC .

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Площу $S_{\Delta ABC}$ обчислимо за формулою

Знайдемо координати вершин $A, B, C \triangle ABC$ з наступних систем рівнянь:

$$A = AB \cap AC: \begin{cases} x+5y=7, \\ 7x+y=-19 \end{cases} \xrightarrow{\times(-7)} \begin{cases} -7x-35y=-49, \\ 7x+y=-19, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -34y=-68, \\ 7x=-y-19, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(-3; 2)$$

$$B = AB \cap BC: \begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4, \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -3x-15y=-21, \\ 3x-2y=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17y=-17, \\ 3x=2y+4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$B(2; 1)$$

$$C = BC \cap CA: \begin{cases} 3x-2y-4=0, \\ 7x+y+19=0, \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 3x-2y=4, \\ 14x+2y=-38, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x=-34, \\ y=-19-7x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-2; -5)$$

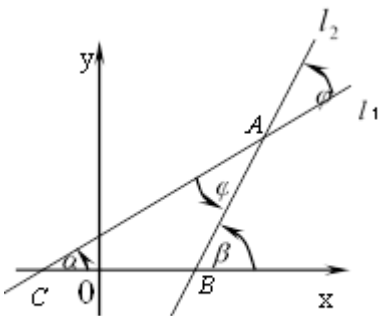


Рис.53

$$\text{Тоді } \vec{AB} = (5; -1), \quad \vec{AC} = (1; -7), \quad S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -34\vec{k}, \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 34,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17 \quad (\text{кв.од.}) \quad \blacktriangledown$$

2.2. Кут між прямими

Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2, \quad (2.12)$$

$l_1, l_2 \perp OX$, α і β – кути нахилу прямих l_1, l_2 відповідно до осі OX , $\alpha = \angle(l_1, \hat{l}_1)$ – кут між прямими l_1 і l_2 (кутом між прямими l_1 і l_2 називають один з двох суміжних кутів між будь-якими двома ненульовими векторами, які належать прямим l_1 і l_2 відповідно (рис.53)).

Тоді $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $k_2 = \operatorname{tg} \beta$. У $\triangle ABC$ (рис.53) $\beta = \alpha + \varphi$, як зовнішній кут трикутника. Звідси $\varphi = \beta - \alpha$. Маємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad k_1 k_2 \neq -1.$$

Отже, кут $\varphi = \angle(l_1, \hat{l}_2)$ обчислюється за формулою:

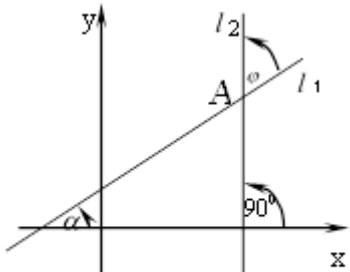


Рис. 54

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (2.13)$$

Зокрема, якщо, наприклад $l_2 \perp OX$, то кут $\varphi = \left(l_1, \wedge l_2 \right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (рис.54).

За формулою (2.13) обчислюється один з двох суміжних кутів, які утворюють прямі l_1, l_2 . Гострий кут цих суміжних кутів обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (2.14)$$

Нехай прямі l_1 і l_2 є відповідно $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$; їх нормалі $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$. Тоді кут $\varphi = \left(l_1, \wedge l_2 \right) = \left(\vec{n}_1, \wedge \vec{n}_2 \right)$ – один з двох суміжних кутів між цими прямими (рис.55) обчислюється за формулою (1.85).

Маємо

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (2.15)$$

Нехай прямі l_1, l_2 є відповідно

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2}.$$

Тоді $\varphi = \left(l_1, \wedge l_2 \right) = \left(\vec{v}_1, \wedge \vec{v}_2 \right)$, де $\vec{v}_1 = (m_1; n_1)$, $\vec{v}_2 = (m_2; n_2)$ і один з двох суміжних кутів між ними (рис. 56) обчислюється за формулою

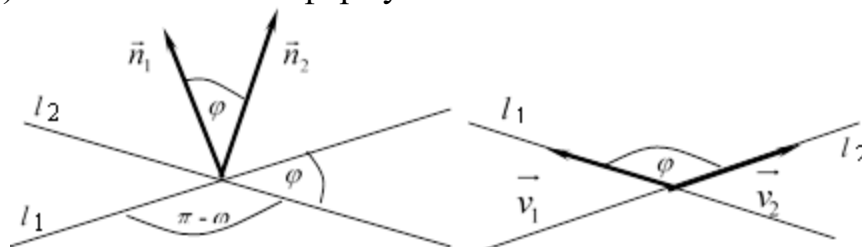


Рис. 55

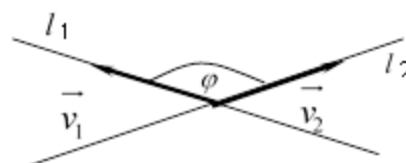


Рис.56

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (2.16)$$

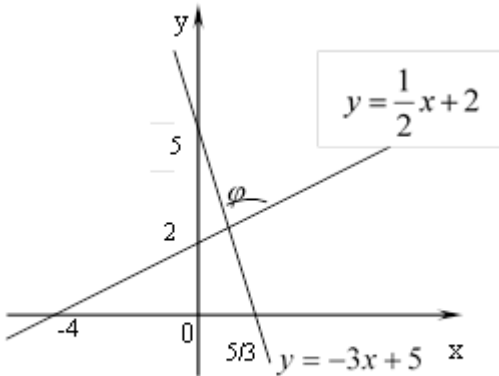


Рис. 57

Приклад № 5. Знайти гострий кут між
прямими $y = \frac{1}{2}x + 2$ і $y + 3x - 5 = 0$.

▲ Запишемо рівняння прямих (рис.57) у вигляді $y = -3x + 5$ і $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Нехай $k_1 = -3$, $k_2 = \frac{1}{2}$, тоді за формулою (2.14) знайдемо
звідки $\varphi = \arctg 7$. ▼

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{1}{2} + 3}{1 - \frac{3}{2}} \right| = 7,$$

2.3. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

1⁰. Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями (2.12). Якщо $l_1 \parallel l_2$, то $\alpha_1 = \alpha_2$
і $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, тобто

$$k_1 = k_2. \quad (2.17)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = (\hat{l_1, l_2}) = \frac{\pi}{2}$. З рівності $\alpha_1 + \varphi = \alpha_2$
маємо $\operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} \alpha_2$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$, або

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (2.18)$$

2⁰. Якщо прямі є рівняння (2.17), тоді їх кутові коефіцієнти
дорівнюють: $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. З рівностей (2.17) маємо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (2.19)$$

Отже, умовою паралельності прямих, заданих загальними рівняннями, є
пропорційність коефіцієнтів при змінних x і y цих рівнянь. З рівності (2.18)

$$\begin{aligned} -\frac{A_2}{B_2} &= -\frac{1}{-\frac{A_1}{B_1}}, \quad -\frac{A_2}{B_2} = \frac{B_1}{A_1}, \quad \text{або} \\ \text{дістаємо} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

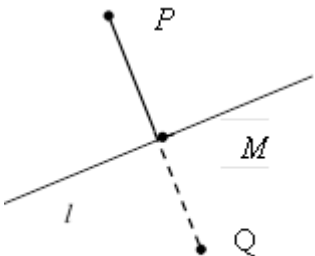


Рис. 58

Рівність (2.20) є умовою перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями.

3°. Якщо прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями, то $l_1 \parallel l_2$, якщо

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad (2.21)$$

$l_1 \perp l_2$, якщо

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (2.22)$$

Приклад № 6. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(-5; 13)$ відносно прямої $l: 2x - 3y - 3 = 0$.

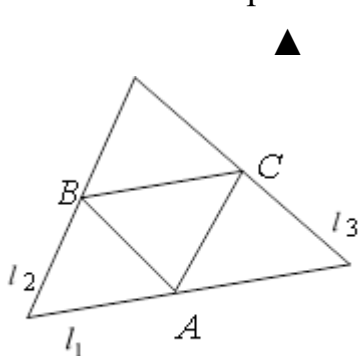


Рис. 59

▲ За означенням симетрії точки відносно прямої $PQ \perp l$, $PQ \cap l = M$, $PM = MQ$. Рівняння прямої PM є: $y - 13 = k_{PM}(x + 5)$,

тобто $k_{PM} = -\frac{1}{k_l}$, оскільки $PM \perp l$.

З рівняння $2x - 3y - 3 = 0$, або $y = \frac{2}{3}x - 1$, $k_l = \frac{2}{3}$, отже $k_{PM} = -\frac{3}{2}$.

Рівняння прямої є: $y - 13 = -\frac{3}{2}(x + 5)$, або $3x + 2y - 11 = 0$ (рис. 58).

Знаходимо точку $M = PQ \cap l$ з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0, \\ 2x - 3y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y - 13 = 0, \\ 2x = 3y + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3, 1).$$

За формулою (1.92): $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$, $y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}$, тобто $3 = \frac{-5 + x_Q}{2}$, $1 = \frac{13 + y_Q}{2}$, звідки $x_Q = 11$, $y_Q = -11$. Отже $Q(11, -11)$. ▼

Приклад № 7. Знайти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(5, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$ паралельно до протилежних сторін.

▲ За формулою (2.11) знаходимо кутові коефіцієнти k_1, k_2, k_3 відповідно прямих AB, AC, BC . Маємо $k_1 = -\frac{7}{6}$, $k_2 = -\frac{1}{4}$, $k_3 = \frac{5}{2}$ (рис. 59).

Позначимо $A \in l_1 \parallel BC$, $B \in l_2 \parallel AC$, $C \in l_3 \parallel AB$. Тоді $k_1 = k_3 = \frac{5}{2}$, $k_2 = k_3 = -\frac{1}{4}$, $k_3 = k_1 = -\frac{7}{6}$. Отже, за формулою (2.10) рівняння прямих l_1, l_2, l_3

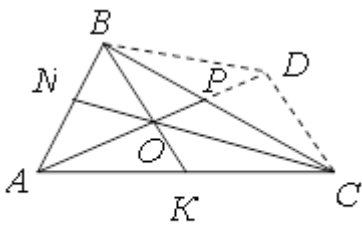


Рис. 60

відповідно є $(y+4)^2 = 5x - 25$, або $2y - 5x + 33 = 0$, $y - 3 = -\frac{1}{4}(x+1)$,
 або $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$; $y + 2 = -\frac{7}{6}(x+3)$, або $6y + 7x + 33 = 0$. ▼

Приклад № 8. Знайти рівняння сторін трикутника ABC , якщо $A(1; 3)$ і рівняння двох медіан: $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$.

▲ BK , CN , AP – медіани

ΔABC (рис.60). Точка $A(1;3) \notin x - 2y + 1 = 0$: $1 - 2 \times 3 + 1 \neq 0$, $A(1;3) \notin y - 1 = 0$: $3 - 1 \neq 0$.

Нехай $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$ – рівняння відповідно медіан BK і CN . Знайдемо точку $O = BK \cap CN$ з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ y - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x - 2 \times 1 + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow O(1, 1).$$

Побудуємо паралелограм $OBDC$ (рис.60). Маємо $OP = \frac{1}{2}AO$ (властивість точки перетину медіан трикутника), $OP = PD$ і $AO = OD$.

Координати точки D знайдемо за формулою (1.92), оскільки O – середина відрізка AD :

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_D}{2} = x_0, \\ \frac{y_A + y_D}{2} = y_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + x_D}{2} = 1, \\ \frac{3 + y_D}{2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1, \\ y_D = -1, \end{cases} \Rightarrow D(1, -1).$$

За формулою (2.10) знаходимо рівняння прямих $DC \parallel BK$ і $BD \parallel OC$.

Оскільки $k_{DC} = k_{BK} = \frac{1}{2}$, $k_{BD} = k_{OC} = 0$, то DC : $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, або $x - 2y - 3 = 0$,
 BD : $y + 1 = 0(x - 1)$, або $y + 1 = 0$.

Знайдемо точки $C = DC \cap NC$ і $B = BK \cap BD$. Маємо

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x - 2y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x - 2 - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 5, \end{cases} \Rightarrow C(5, 1)$$

і

$$\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x + 2 + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \end{cases} \Rightarrow B(-3, -1).$$

За формулою (2.3) знаходимо рівняння сторін ΔABC :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \Rightarrow \frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 3}{-1 - 3}, \Rightarrow x - 1 = y - 3, \Leftrightarrow x - y + 2 = 0,$$

$$(BC): \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}, \Rightarrow \frac{x+3}{8} = \frac{y+1}{2}, \Leftrightarrow x - 4y - 1 = 0;$$

$$(AC): \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A}, \Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2}, \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0. \blacktriangledown$$

Приклад № 9. Дана вершина $A(3; 9)$ трикутника ABC та рівняння медіан: $y = 6$, $3x - 4y + 9 = 0$. Знайти координати двох інших вершин трикутника.

▲ Жодна з медіан не виходить із точки A , оскільки координати цієї точки не задовольняють рівняння медіан: $y_A = 9 \neq 6$, $3 \times 3 - 4 \times 9 + 9 \neq 0$. Нехай $y = 6$ – рівняння медіани (NB) , а $3x - 4y + 9 = 0$ – рівняння медіани (CM) . Тоді точки B, N мають відповідно координати $(x_B; 6)$, $(x_N; 6)$.

Знайдемо координати точки C . $C \in (CM)$: $3x_C - 4y_C + 9 = 0$. N – середина відрізка AC :

$$\begin{cases} x_C + x_A = 2x_N, \\ y_C + y_A = 2y_N; \end{cases} \quad \begin{cases} x_C + 3 = 2x_N, \\ y_C + 9 = 12. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} 3x_C - 4y_C + 9 = 0, \\ x_C + 3 = 2x_N, \\ y_C + 9 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = 2x_N - 3, \\ y_C = 3, \\ 3x_C = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = 1, \\ y_C = 3, \\ x_N = 2. \end{cases}$$

Маємо $C(1; 3)$. Знайдемо координати точки B :

$$\begin{cases} \frac{x_B + \lambda x_N}{1 + \lambda} = x_0, \\ \frac{y_B + \lambda y_N}{1 + \lambda} = y_0. \end{cases}$$

Оскільки O – точка перетину медіан, то $2|ON| = |OB|$ (за властивістю медіан) і $\lambda = 2$. $O = BN \cap CM: \begin{cases} y = 6, \\ 3x - 4y + 9 = 0, \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ x = 5, \end{cases} O(5; 6). \text{ Тоді}$$

$$\begin{cases} x_B + 2x_N = 3 \times 5, \\ y_B + 2y_N = 3 \times 6. \end{cases}$$

$$\text{Але } x_N = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_N = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{3+9}{2} = 6.$$

Отже,

$$x_B = 15 - 2 \times 2 = 11, \quad y_B = 18 - 2 \times 6 = 6; \quad B(11; 6)$$

Відповідь: $C(1; 3)$, $B(11; 6)$. $\blacktriangledown$

Приклад № 10. Скласти рівняння сторін трикутника ABC , якщо відома одна його вершина $B(2; -7)$, а також рівняння висоти (AD) : $3x + y + 11 = 0$ і медіани (CM) : $x + 2y + 7 = 0$.

▲ 1. Оскільки $AD \perp BC$, то $k_{BC} = -\frac{1}{k_{AD}}$, а з рівняння $3x + y + 11 = 0$, або $y = -3x - 11$, дістанемо $k_{AD} = -3$; $k_{BC} = \frac{1}{3}$.

Складемо рівняння (BC) : $y - y_B = k_{BC}(x - x_B)$; $y + 7 = \frac{1}{3}(x - 2)$; $x - 3y - 23 = 0$.

2. Знайдемо координати точки $C = (BC) \cap (CM)$ з системи:

$$\begin{cases} x + 2y + 7 = 0, \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}x - \frac{46}{3} + 7 = 0, \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Отже, $C(5; -6)$.

3. Знайдемо координати точки A . $A \in (AD)$, тоді $3x_A + y_A + 11 = 0$. Оскільки точка M – середина відрізка AB , то $\frac{x_A + 2}{2} = x_M$, $\frac{y_A - 7}{2} = y_M$; $M \in (CM)$, тоді $x_M + 2y_M + 7 = 0$.

Координати точки A знайдемо з системи

$$\begin{cases} 3x_A + y_A + 11 = 0, \\ x_A + 2 = 2x_M, \\ y_A - 7 = 2y_M, \\ x_M + 2y_M + 7 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_A + y_A + 11 = 0, \\ \frac{1}{2}(x_A + 2) + y_A - 7 + 7 = 0, \\ x_M = \frac{1}{2}(x_A + 2), \\ y_M = \frac{1}{2}(y_A - 7); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_A + y_A + 11 = 0, \\ x_A + 2y_A + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_A = 1, \\ x_A = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(-4; 1)$.

4. Складемо рівняння прямих (AB) і (AC) , що проходять через дві точки за формулою (2.3). Маємо,

$$(AB): \frac{x+4}{2+4} = \frac{y-1}{-7-1}; \quad -8(x+4) = 6(y-1); \quad 4x+3y+13=0.$$

$$(AC): \frac{x+4}{5+4} = \frac{y-1}{-6-1}; \quad -7(x+4) = 9(y-1); \quad 7x+9y+19=0.$$

Відповідь: $x - 3y - 23 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$ – рівняння шуканих сторін трикутника. ▼

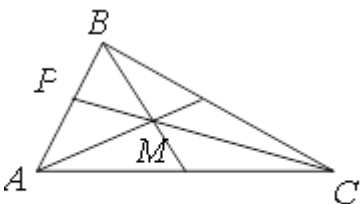


Рис. 61

Приклад № 11. В трикутнику ABC відомі дві вершини $A(2; 2)$, $B(3; 0)$ і точка перетину медіан $M(3; 1)$. Скласти рівняння сторін трикутника (рис. 61).

▲ 1. Складемо рівняння прямої (AB) : $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-2}{0-2}$, $-2x+4=y-2$,
 $2x+y-6=0$.

Отже, $2x+y-6=0$ – рівняння (AB) .

2. Знайдемо координати точки $P(x_P, y_P)$: $AP=PB$,

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5; \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$$

Отже, $P(2,5; 1)$.

3. Оскільки $x_C = \frac{x_P + \lambda x_M}{1 + \lambda}$, $y_C = \frac{y_P + \lambda y_M}{1 + \lambda}$, а $\lambda = -2$, то $x_C = \frac{2,5 - 2 \times 3}{1 - 2} = 3,5$;
 $y_C = \frac{1 - 2 \times 1}{1 - 2} = 1$. Отже, $C(3,5; 1)$.

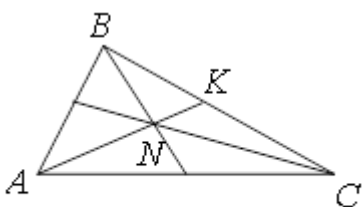


Рис. 62

4. Складемо рівняння прямої (BC) : $\frac{x-3,5}{3-3,5} = \frac{y-1}{0-1}$,
 $x-3,5 = \frac{1}{2}(y-1)$, $2x-7=y-1$.

Отже, $2x-y-6=0$ – рівняння (BC) .

5. Складемо рівняння прямої (AC) : $\frac{x-3,5}{2-3,5} = \frac{y-1}{2-1}$; $x-3,5 = -\frac{3}{2}(y-1)$;
 $2x-7=-3y+3$.

Отже, $2x+3y-10=0$ – рівняння (AC) .

Відповідь: $2x+y-6=0$, $2x-y-6=0$, $2x+3y-10=0$ – рівняння шуканих сторін трикутника. ▼

Приклад № 12. Дано рівняння сторін трикутника $x+y-1=0$ і $y+1=0$ та точка перетину його медіан $N(-1; 0)$. Знайти рівняння третьої сторони.

▲ 1. Знайдемо координати точки A з системи рівнянь (рис. 62):

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1, \\ x=2, \end{cases} \Rightarrow A(2; -1).$$

2. Обчислимо довжини відрізків NA і KN :

$$|NA| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}; \quad |KN| = \frac{1}{2} |NA| = \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

3. Оскільки $x_N = \frac{x_A + \lambda x_K}{1 + \lambda}$, $y_N = \frac{y_A + \lambda y_K}{1 + \lambda}$, а $\lambda = 2$, тоді $-1 = \frac{2+2x_K}{1+2}$,
 $0 = \frac{-1+2y_K}{1+2}$; $x_K = -2,5$, $y_K = 0,5$.

Отже, $K(-2,5; 0,5)$.

4. Оскільки $\frac{x_B + x_C}{2} = x_K$, то $x_B + x_C = 2 \times \left(-\frac{5}{2}\right)$, $x_B + x_C = -5$; $y_B + y_C = 2y_K$, то $y_B + y_C = 1$. Але $y_C = -1$, тоді $y_B = 2$. Отже, $B(x_B; 2)$, $C(-5 - x_B; -1)$.

5. Оскільки $|KB| = |KC|$: $\sqrt{\left(x_B + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_B - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x_C + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_C - \frac{1}{2}\right)^2}$;
 $\left(x_B + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_B - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x_C + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_C - \frac{1}{2}\right)^2$. Але $y_C = -1$, $y_B = 2$,
 тоді $\left(x_B + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x_C + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$; $x_B = x_C$ і $x_B + x_C = -5$, тоді $2x_C = -5$
 і $x_B = x_C = -\frac{5}{2}$. Отже $B(-2,5; 2)$, $C(-2,5; -1)$.

6. Складемо рівняння сторони BC трикутника ABC : $\frac{x+2,5}{0} = \frac{y-2}{-3}$;
 $(y-2) \times 0 = -3(x+2,5)$, звідки $x = -2,5$.

Відповідь: $x = -2,5$ – рівняння шуканої сторони. ▼

Приклад № 13. Задано вершини трикутника $A(-5; 8)$, $B(-6; 5)$, $C(1; 6)$.
 Скласти рівняння бісектриси AK .

▲ Оскільки $x_K = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda}$, $y_K = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda}$, де $\lambda = \frac{BK}{KC}$, а за властивістю бісектриси

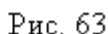
$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \lambda, \text{ тобто } \lambda = \frac{\sqrt{(-6+5)^2 + (5-8)^2}}{\sqrt{(1+5)^2 + (6-8)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{40}} = \frac{1}{2}, \text{ то } x_K = \frac{-6 + \frac{1}{2} \times 1}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{11}{3},$$

$$y_K = \frac{5 + \frac{1}{2} \times 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{16}{3}; \quad K\left(-\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right).$$

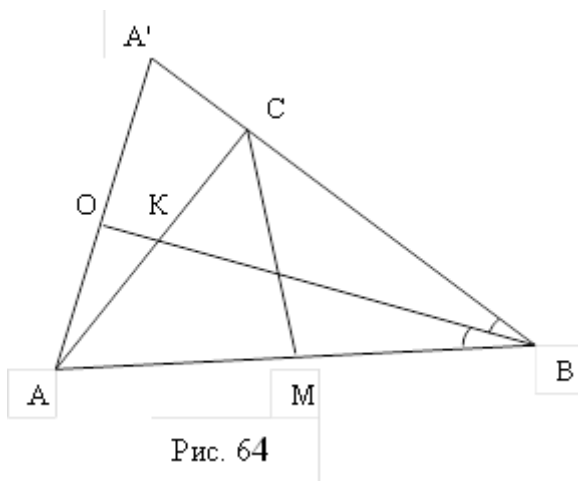
Складемо рівняння бісектриси AK : $\frac{x+5}{-\frac{11}{3}+5} = \frac{y-8}{\frac{16}{3}-8}$; $(x+5)\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}(y-8)$
 $-2(x+5) = y-8$, $2x+y+2=0$.

Відповідь: $2x+y+2=0$. ▼

Приклад № 14. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома одна з його вершин $A(4; -1)$ та рівняння двох бісектрис: $x-1=0$ і $x-y-1=0$.



2. Точка A' симетрична A (рис. 63) відносно бісектриси NC (її продовження $-OC$) і лежить на продовженні сторони BC (за



Приклад № 15. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома одна його вершина $A(3, -1)$, а також рівняння бісектриси $x - 4y + 10 = 0$ і медіани $6x + 10y - 59 = 0$, проведених з різних вершин.

▲ 1. Перевіряємо, чи належить точка A бісектрисі $(l_2): x - 4y + 10 = 0$ і медіані $(l_1): 6x + 10y - 59 = 0$; (l_2) :

$3 - 4(-1) + 10 \neq 0$, $(l_1): 6 \times 3 + 10(-1) - 59 \neq 0$. Отже, $A \notin l_1$, $A \notin l_2$.

Нехай CM – медіана $6x + 10y - 59 = 0$, BK – бісектриса $x - 4y + 10 = 0$ (рис. 64).

2. Точка A' симетрична відносно бісектриси BK і лежить на продовженні сторони BC трикутника ABC . Нехай O – точка перетину AO з бісектрисою BK , причому $AO \perp BK$.

Рівняння бісектриси BK : $x - 4y + 10 = 0$, або $4y = x + 10$, звідки $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$.

Кутовий коефіцієнт BK : $k_{BK} = k_{BO} = \frac{1}{4}$.

Оскільки $AO \perp OB$, то $k_{AO} = -4$.

Складемо рівняння AO (AA'): $y + 1 = -4(x - 3)$, $y + 4x - 11 = 0$.

3. Знайдемо координати точки O :

$$\begin{cases} x - 4y + 10 = 0, \\ y + 4x - 11 = 0, \end{cases} \begin{cases} x - 4y = -10, \\ 17y = 51, \end{cases} \begin{cases} y = 3, \\ x = 2, \end{cases} \quad O(2; 3).$$

Тоді $x_A = 2x_O - x_{A'} = 1$, $y_A = 2y_O - y_{A'} = 7$, $A'(1; 7)$.

4. $B \in BK: x_B - 4y_B + 10 = 0$, $M \in CM: 6x_M + 10y_M - 59 = 0$,

M – середина відрізка AB : $3 + x_B = 2x_M$, $-1 + y_B = 2y_M$.

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x_B - 4y_B + 10 = 0, \\ 6x_M + 10y_M - 59 = 0, \\ 3 + x_B = 2x_M, \\ -1 + y_B = 2y_M, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \times \frac{3 + x_B}{2} + 10 \times \frac{y_B - 1}{2} - 59 = 0, \\ x_B - 4y_B + 10 = 0, \\ x_M = \frac{3 + x_B}{2}, \\ y_M = \frac{y_B - 1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_B + 5y_B - 55 = 0, \\ 3x_B - 12y_B + 30 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y_B - 85 = 0, \\ x_B = 4y_B - 10, \end{cases} \begin{cases} y_B = 5, \\ x_B = 10, \end{cases} \quad B(10; 5).$$

5. Складемо рівняння AB : $\frac{x - 3}{10 - 3} = \frac{y + 1}{5 + 1}$; $6(x - 3) = 7(y + 1)$, $6x - 7y - 25 = 0$.

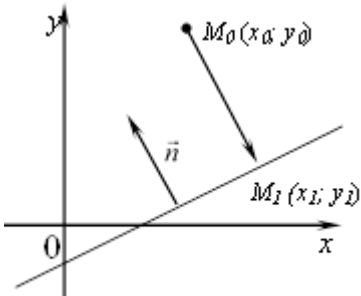


Рис. 65

6. Складемо рівняння BA' (BC): $\frac{x-10}{1-10} = \frac{y-5}{7-5}$; $\frac{x-10}{-9} = \frac{y-5}{2}$;
 $2(x-10) = -9(y-5)$; $2x+9y-65=0$.

7. Знайдемо координати точки C :

$$\begin{cases} BC: 2x+9y-65=0, \\ CM: 6x+10y-59=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+27y-195=0, \\ 6x+10y-59=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 17y=136, \\ x=\frac{59-10y}{6}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=8, \\ x=-3,5, \end{cases} \quad C(-3,5; 8)$$

8. Складемо рівняння AC :

$$\frac{x+3,5}{3+3,5} = \frac{y-8}{-1-8}; \quad -9(x+3,5)=6,5(y-8); \quad 18x+13y-41=0.$$

Відповідь: $6x-7y-25=0$, $2x+9y-65=0$, $18x+13y-41=0$. ▼

2.4. Відстань та відхилення від точки до прямої

Нехай задані

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.23)$$

— рівняння прямої l , $\vec{n} = (A, B)$ — її нормаль, $n = |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, і точка $M_0(x_0; y_0) \notin l$. Будуємо $M_0M_1 \perp l$, $M_1 \in l$. Позначимо $M_0M_1 = d \geq 0$ — віддаль від точки M_0 до прямої l (рис. 65), $M_1(x_1; y_1)$.

Тоді $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0) = \vec{d}$; $\vec{n} \parallel \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \lambda \vec{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, або

$$x_1 - x_0 = \lambda A; \quad y_1 - y_0 = \lambda B.$$

Звідси $x_1 = x_0 + \lambda A$; $y_1 = y_0 + \lambda B$.

Оскільки $M_1(x_1; y_1) \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Підставимо значення x_1, y_1 , дістанемо $A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C = 0$, або $(A^2 + B^2)\lambda + Ax_0 + By_0 + C = 0$, звідки

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}. \quad (2.24)$$

Знаходимо

$$d = |\lambda| \cdot n = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \times \sqrt{A^2 + B^2},$$

звідки дістанемо формулу відстані від заданої точки до заданої прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.25)$$

Відхиленням точки M_0 від прямої l називається число $\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

взяте із знаком "+", якщо точка і початок координат лежать по різні сторони від прямої, та з "-", якщо — по одну сторону.

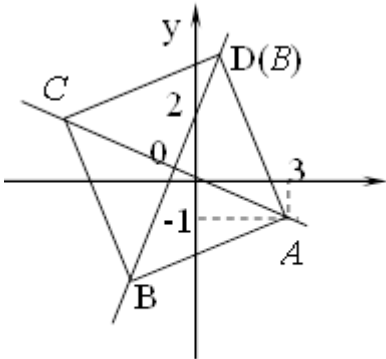


Рис. 66

Приклад № 16. $3x - y + 2 = 0$ – рівняння діагоналі квадрата, $A(3, -1)$ – його вершина. Знайти інші вершини квадрата.

▲ Нехай $ABCD$ – квадрат. Точка $A(3, -1) \notin 3x - y + 2 = 0$
 $\therefore 3 \times 3 - (-1) + 2 \neq 0$, отже $3x - y + 2 = 0$ – рівняння діагоналі BD (рис. 66).

Оскільки $AC \perp BD$ (за властивістю діагоналей квадрата), то
 $k_{BD} = 3$. $k_{AC} = -\frac{1}{k_{BD}}$,

Звідси $k_{AC} = -\frac{1}{3}$. Тоді за формулою (2.10) рівняння прямої
 $AC: y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$, або $3y + x = 0$.

Знайдемо точку $O = AC \cap BD$ з системи:

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ 3y + x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2, \\ 3(3x + 2) + x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2, \\ 10x + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,6, \\ y = 3(-0,6) + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,6, \\ y = 0,2, \end{cases} \Rightarrow O(-0,6; 0,2).$$

Оскільки точка O – середина відрізка AC , то $\frac{x_C + x_A}{2} = x_0$, $\frac{y_C + y_A}{2} = y_0$,
 звідки $x_C = 2 \times (-0,6) - 3 = -4,2$; $y_C = 2 \times 0,2 - (-1) = 1,4$, отже, $C(-4,2; 1,4)$. Маємо
 $AC = \sqrt{(3 + 4,2)^2 + (-1 - 1,4)^2} = 2,4\sqrt{10}$.

Точка $D(x_D; y_D)$ віддалена від прямої $AC: 3y + x = 0$ на відстані $d = 1,2\sqrt{10}$.
 За формулою (2.25)

$$1,2\sqrt{10} = \frac{|3y_D + x_D|}{\sqrt{9 + 1}},$$

звідки $12 = |x_D + 3y_D|$. Оскільки точка $D(x_D; y_D) \in BD: 3x - y + 2 = 0$,
 то $3x_D - y_D + 2 = 0$.

Точку D знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_D - y_D + 2 = 0, \\ x_D + 3y_D = \pm 12, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, дістанемо два розв'язки: $D(0,6; 3,8)$ і $D(-1,8; -3,4)$.

Вершину B квадрата знайдемо з умови, що точка O – середина відрізка BD :
 :

$$\frac{x_B + x_D}{2} = x_0, \quad \frac{y_B + y_D}{2} = y_0,$$

звідки $x_B = 2x_0 - x_D$, $y_B = 2y_0 - y_D$, або

$$x_B = 2 \times (-0,6) - 0,6 = -1,8; \quad y_B = 2 \times 0,2 - 3,8 = -3,4;$$

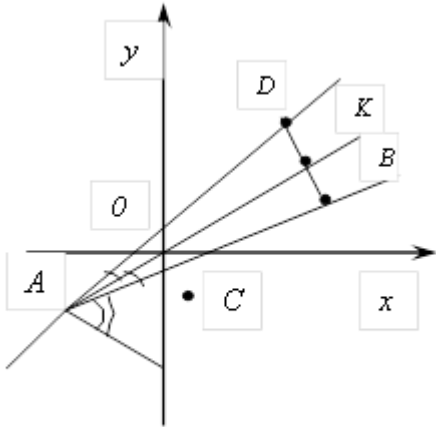


Рис. 67

$$x_B = 2 \times (-0,6) + 1,8 = 0,6; \quad y_B = 2 \times 0,2 + 3,4 = 3,8.$$

$$B(-1,8; -3,4) \quad ; \quad B(0,6; 3,8). \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 17. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$, суміжного з кутом, що містить точку $C(2; -1)$.

▲ Нехай AK - бісектриса кута A , утвореного прямими $AB: 2x - 3y - 5 = 0$ та $AD: 6x - 4y + 7 = 0$. $\vec{N}_{AB}(2; -3)$

, $\vec{N}_{AD}(6; -4)$.

1) Перевіряємо належність точки $C(2; -1)$ прямим AB , AD : $4 + 3 - 5 \neq 0$, $12 + 4 + 7 \neq 0$. $C \notin AB$, $C \notin AD$.

2) Знайдемо координати точки A з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0, \\ 6x - 4y + 7 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 9y - 15 = 0, \\ 6x - 4y + 7 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5y + 22 = 0, \\ x = \frac{1}{6}(-7 + 4y), \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4,4, \\ x = -4,1, \end{cases}$$

$$A(-4,1; -4,4)$$

3) Складемо рівняння бісектриси AK , що проходить через точку $A(-4,1; -4,4)$:

$$y + 4,4 = k(x + 4,1) \quad \text{або} \quad kx - y + 4,1k - 4,4 = 0,$$

$$\vec{N} = (k; -1). \quad k \text{ знайдемо з умови: } \angle BAK = \angle KAD, \quad \text{або} \quad \left(\vec{N}_{AB}; \hat{\vec{N}} \right) = \left(\hat{\vec{N}}; \vec{N}_{AD} \right)$$

$$; \quad \frac{\vec{N}_{AB} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}_{AB}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{\vec{N} \cdot \vec{N}_{AD}}{|\vec{N}| \cdot |\vec{N}_{AD}|}; \quad \frac{2k+3}{\sqrt{13} \sqrt{k^2+1}} = \frac{6k+4}{\sqrt{k^2+1} \sqrt{52}}; \quad 2k+3 = \frac{2(3k+2)}{2};$$

$$2k+3 = 3k+2, \quad \text{звідки} \quad k = 1.$$

Отже, рівняння AK :

$$y + 4,4 = x + 4,1; \quad \text{або} \quad y = x - 0,3, \quad 10x - 10y - 3 = 0.$$

4) Обчислимо відхилення точки C від прямої $2x - 3y - 5 = 0$ $\left(\frac{x}{5/2} + \frac{y}{-5/3} = 1 \right)$, яка проходить нижче від $O(0; 0)$. Пряма $6x - 4y + 7 = 0$ проходить вище від початку

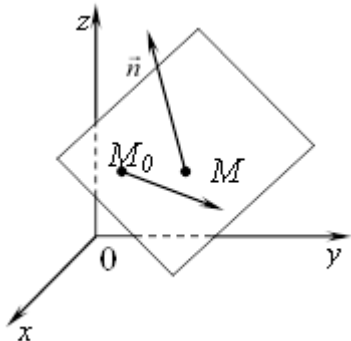


Рис. 84

§ 3. ПЛОЩИНА

3.1. Загальне рівняння площини

● **Теорема.** У системі координат з базисом $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ між площиною Π і лінійним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, відносно змінних x, y, z – координат $(x, y, z) \in \Pi$, існує взаємнооднозначна відповідність.

Доведення. Необхідність: $\Pi \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$. У базисі $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ площина Π визначається однозначно нормаллю $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n} \perp \Pi$ і точкою $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$ (рис.84), $M(x, y, z)$ – змінна точка площини. Тоді $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \Rightarrow$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.54)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Отже $\Pi \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$.

Достатність. $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \Pi$. Оскільки $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то існує вектор $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$. Нехай x_0, y_0, z_0 – один з розв'язків заданого рівняння: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Тоді рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2.55)$$

де x, y, z – довільний розв'язок цього рівняння, еквівалентне даному рівнянню. За необхідністю теореми рівняння (2.55) є площина $\Pi \perp \vec{n}$, тому еквівалентне йому рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ є площина Π . Отже, $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \Pi$. ●

Рівняння (2.54) є загальне рівняння площини в системі координат з базисом $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; рівняння (2.55) – рівняння площини, що проходить через точку M_0 , перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$.

Дослідження загального рівняння площини.

1⁰. $A, B, C \neq 0, D = 0$, то площина $Ax + By + Cz = 0$ проходить через початок координат.

2⁰. $A = 0 (-\infty < x < \infty)$ і $B, C, D \neq 0$, то площина $By + Cz + D = 0$ паралельна до осі OX .

3°. $A = B = 0$ ($-\infty < x < \infty$ і $-\infty < y < \infty$), $C, D \neq 0$ то площина $Cz + D = 0$,
або $z = -\frac{D}{C}$ паралельна до площини XOY .

4°. $A = 0$ ($-\infty < x < \infty$), $D = 0$, $B, C \neq 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через початок координат паралельно до осі OX .

5°. $A = B = D = 0$ ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$), $C \neq 0$, то $Cz = 0$, або $z = 0$ є координатна площина XOY .

$$6°. A, B, C, D \neq 0. \quad \text{Тоді } \frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1. \quad \text{Позначимо } -\frac{D}{A} = a, \\ -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c, \quad \text{маємо} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(2.56)

– рівняння площини Π у відрізках на координатних осях, де $(a; 0; 0) = \Pi \cap OX$, $(0; b; 0) = \Pi \cap OY$, $(0; 0; c) = \Pi \cap OZ$.

Приклад № 36. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $P(2; -1; 1)$ і перпендикулярна до прямої OP , $O(0; 0; 0)$.

▲ Вектор $\vec{n} = \overrightarrow{OP} = (2; -1; 1)$ – нормаль площини і з (2.55) дістаємо її рівняння: $2 \times (x - 2) - (y + 1) + (z - 1) = 0$, або $2x - y + z - 6 = 0$. ▼

Приклад № 37. Знайти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і точку $M(-2; 1; 1)$.

▲ Рівняння площини, що проходить через вісь OZ : $Ax + By = 0$. Точка M лежить на цій площині, тому $A \times (-2) + B \times 1 = 0$, звідки $B = 2A$. Отже, рівняння площини: $Ax + 2Ay = 0$, тобто $x + 2y = 0$. ▼

Приклад № 38. Задані точки $M_1(0; -1; 3)$ і $M_2(1; 3; 5)$. Знайти рівняння площини, що проходить через точку M_1 , перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

▲ Рівняння площини: $A(x - 0) + B(y + 1) + C(z - 3) = 0$; вектор $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1; 4; 2)$ – її нормаль. Тому у рівнянні площини $A=1, B=4, C=2$.
Отже, $1 \times (x - 0) + 4 \times (y + 1) + 2 \times (z - 3) = 0$, або $x + 4y + 2z - 2 = 0$. ▼

Приклад № 39. Знайти рівняння площини, яка паралельна до осі OX і проходить через точки $M_1(0; 1; 3)$, $M_2(2; 4; 5)$.

▲ Рівняння площини, паралельної до осі OX :
 $By + Cz + D = 0$. Точки M_1 і M_2 лежать на цій площині, тому

$$\begin{cases} B \times 1 + C \times 3 + D = 0, \\ B \times 4 + C \times 5 + D = 0. \end{cases}$$

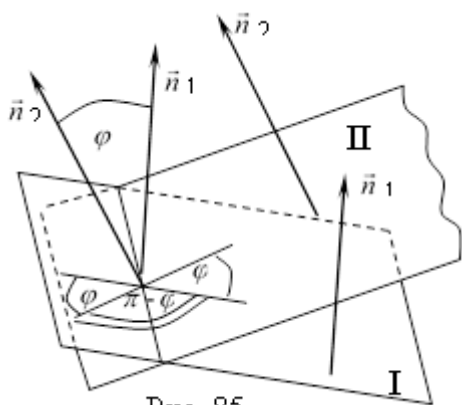


Рис. 85

Розв'язок цієї системи рівнянь відносно B і C :

$$+ \begin{cases} -4 \times B - 12 \times C - 4 \times D = 0, \\ 4 \times B + 5 \times C + D = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + 3 \times C + D = 0, \\ -7 \times C - 3 \times D = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{3}{7}D, \\ B = \frac{2}{7}D. \end{cases}$$

Підставимо значення B та C в рівняння площини:

$$\frac{2}{7}Dy - \frac{3}{7}Dz + D = 0, \quad \text{або} \quad 2y - 3z + 7 = 0. \quad \blacktriangledown$$

3.2. Кут між двома площинами, умови їх паралельності та перпендикулярності

Нехай задано площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad ; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2.57)$$

Якщо дві площини перетинаються, то вони утворюють суміжні двогранні кути (рис.85).

Якщо один з них дорівнює φ , то суміжний з ним дорівнює $\pi - \varphi$.

Означення 9. *Кутом φ між двома площинами* називається один з двох суміжних двограних кутів, утворених цими площинами.

Маємо вектори $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$; $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – нормалі площин (2.57)

відповідно. Тоді один із суміжних кутів $0 < \varphi = \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) < \frac{\pi}{2}$ дорівнює

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|},$$

або

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.58)$$

Якщо $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (2.59)$$

Якщо площини паралельні, то $\varphi = \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) = 0, \quad \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.60)$$

Пропорції (2.60) – умови паралельності площин (2.57).

Приклад № 40. Знайти кут між площинами $x - 2y + 2z - 8 = 0, \quad x + z - 6 = 0$.

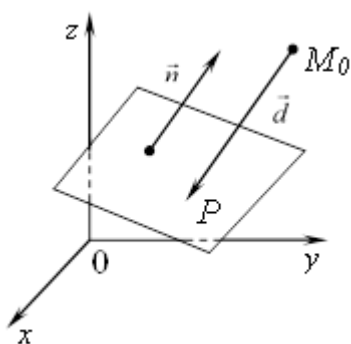


Рис.86

▲ $\vec{n}_1 = (1; -2; 2)$ і $\vec{n}_2 = (1; 0; 1)$ відповідно нормалі цих площин.

Тоді кут $\varphi = \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right)$ між площинами знаходимо за формулою (2.58):

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{звідки} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 41. Знайти площину, що проходить через точку $M(2; 2; -2)$ і паралельна до площини $x - 2y - 3z = 0$.

▲ $\vec{n} = (1; -2; -3)$ – нормаль шуканої площини. Оскільки площина проходить через точку $M(2; 2; -2)$, то

$$1 \times (x - 2) - 2 \times (y - 2) - 3 \times (z + 2) = 0,$$

звідки $x - 2y - 3z - 4 = 0$. $\blacktriangledown$

Приклад № 42. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1; -2; 0)$, $M_2(1; 1; 2)$ і перпендикулярна до площини $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

▲ Оскільки точки M_1 і M_2 лежать на площині $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\begin{cases} -1 \cdot A - 2 \cdot B + D = 0, \\ 1 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C + D = 0. \end{cases}$$

$\vec{n}_1 = (A; B; C)$ – нормаль шуканої площини, $\vec{n} = (1; 2; 2)$ – нормаль заданої площини. Тому $\vec{n}_1 \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 2 = 0$. Тоді A , B , C і D знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} -A - 2B + D = 0, \\ A + B + 2C + D = 0, \\ A + 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, маємо: $A = -D$, $B = D$, $C = -\frac{D}{2}$. Підставляючи ці значення в рівняння шуканої площини, дістанемо рівняння площини

$$-Dx + Dy - \frac{D}{2}z + D = 0, \quad \text{звідки} \quad 2x - 2y + z = 2. \quad \blacktriangledown$$

3.3. Відстань та відхилення від точки до площини

Знайдемо відстань $d \geq 0$ від заданої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис.86). Нехай вектор $\vec{d} = \overline{M_0P} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$, перпендикулярний до площини, точка $P(x_1; y_1; z_1)$ – основа перпендикуляра $\overline{M_0P}$.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормаль площини, тому $\vec{n} \parallel \vec{d}$, отже $\vec{d} = \lambda \vec{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
або

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = A \lambda, \\ y_1 - y_0 = B \lambda, \\ z_1 - z_0 = C \lambda, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + A \lambda, \\ y_1 = y_0 + B \lambda, \\ z_1 = z_0 + C \lambda. \end{cases} \quad (2.61)$$

Тоді $d = |\lambda| n$, $n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Точка $P(x_1; y_1; z_1)$ належить площині, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$; в цю рівність підставимо $x_1; y_1; z_1$ з (2.61), дістанемо

$$A(x_0 + A \lambda) + B(y_0 + B \lambda) + C(z_0 + C \lambda) + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

звідки
$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Тоді

$$d = |\lambda| n = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.62)$$

Відхилення δ точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тут δ береться зі знаком "+", якщо точка M_0 і початок координат $O(0; 0; 0)$ лежать по різні сторони від площини і зі знаком "-", якщо вони лежать по одну сторону.

Приклад № 43. Знайти відстань між паралельними площинами $5x + 3y - 4z + 15 = 0$ і $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

▲ Виберемо на площині $15x + 9y - 12z - 5 = 0$ деяку точку, наприклад, $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. Тоді за формулою (2.62) знайдемо шукану відстань d :

$$d = \frac{\left|5 \times \frac{1}{3} + 3 \times 0 + (-4) \times 0 + 15\right|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangledown$$

3.4. Взаємне положення трьох площин

Нехай задані площини

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

На рис. 87 – 94 показано взаємне положення трьох площин:

- 1⁰. Площини перетинаються, мають одну спільну точку (рис.87).
- 2⁰. Дві площини паралельні, а третя їх перетинає (рис.88).
- 3⁰. Площини попарно перетинаються (рис.89).
- 4⁰. Три площини попарно паралельні (рис.90).
- 5⁰. Площини належать до пучка площин, але попарно різні (рис.91).
- 6⁰. Дві площини збігаються, а третя їх перетинає (рис.92).
- 7⁰. Дві площини збігаються, а третя паралельна до них (рис.93).
- 8⁰. Три площини збігаються (рис.94).

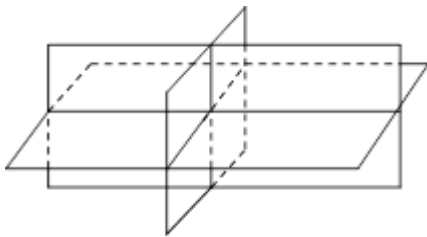


Рис. 87

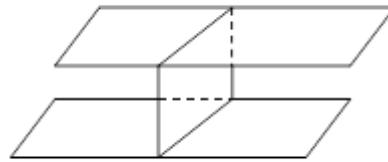


Рис. 88

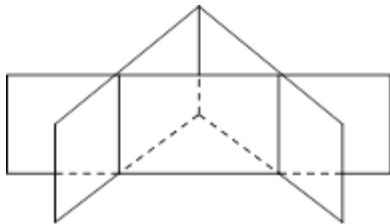


Рис. 89

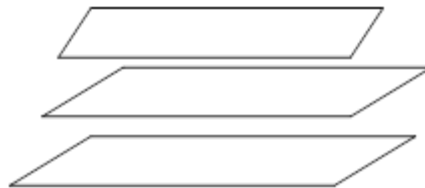


Рис. 90

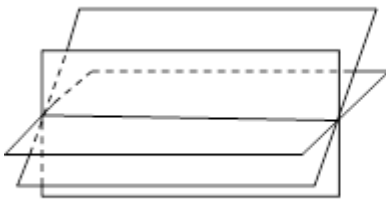


Рис.91

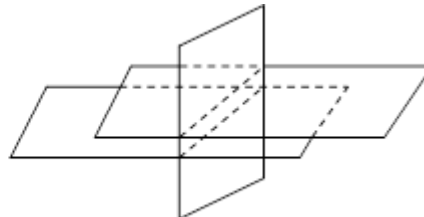


Рис. 92

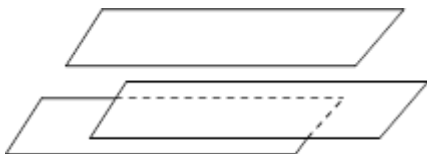


Рис. 93

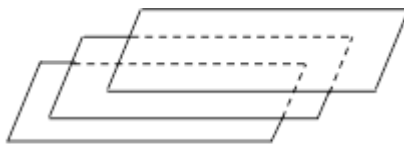


Рис. 94

Позначимо

через r_1 та r_2 ранги основної і розширеної матриць

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$$

системи (2.63).

● **Теорема (без доведення).** 1). Щоб задані площини (2.63) мали одну спільну точку, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = r_2 = 3$.

2). Щоб задані площини належали до одного пучка площин, необхідно і достатньо, щоб $r_2 < 3$. ●

Приклад № 44. Довести взаємне розміщення трьох площин:

$$x + 2y - z - 3 = 0, \quad x + 4y - 6 = 0, \quad 2x + 5y - 3z - 6 = 0.$$

▲ Знайдемо ранги r_1 і r_2 основної і розширеної матриць системи рівнянь заданих площин:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Звідси $r_1 = r_2 = 3$. Отже, площини перетинаються в одній точці. ▼

5.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина в просторі проходить через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$

. $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$. Точка $M(x; y; z)$ лежить в площині з точками M_1, M_2, M_3 , тоді і

тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$

компланарні, тобто $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – це рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

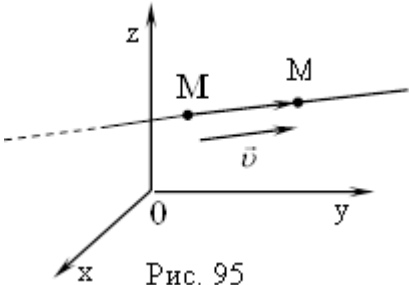


Рис. 95

§ 4. ПРЯМА В ПРОСТОРИ

4.1. Канонічні і параметричні рівняння прямої лінії в просторі

Пряма у просторі однозначно задається точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{v} = (m; n; p)$ (рис.95).

Нехай точка $M(x, y, z)$ – змінна точка прямої.

Тоді вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Із колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ і $\vec{v}$ дістаємо канонічні рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2.64)$$

Позначимо у (2.64) рівні відношення через t , $t \in \mathbb{R}$, тоді дістанемо параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (2.65)$$

Приклад № 45. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(4; 3; 0)$ паралельно вектору $\vec{v} = (-1; 1; 1)$.

▲ За формулою (2.64) маємо

$$\frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{1}, \quad \text{або} \quad 4 - x = y - 3 = z. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 46. Знайти *рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

▲ Напрямний вектор прямої:

$$\vec{v} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad \blacktriangledown \quad (2.66)$$

Приклад № 47. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(2; 3; 3)$.

▲ За формулою (2.66) маємо:

$$\frac{x - 2}{2 - 2} = \frac{y + 1}{3 + 1} = \frac{z - 3}{3 - 3}, \quad \text{або} \quad \frac{x - 2}{0} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 3}{0},$$

звідки рівняння прямої задається перетином двох площин: $\begin{cases} x = 2, \\ z = 3. \end{cases} \quad \blacktriangledown$

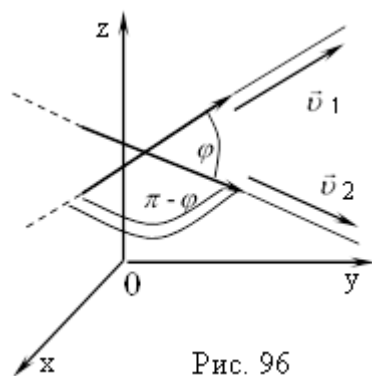


Рис. 96

4.2. Кут між прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

Нехай задані прямі

$$\vec{v}_1 = (m_1; n_1; p_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad \vec{v}_2 = (m_2; n_2; p_2)$$

Означення 10. **Кутом** між двома прямими називається кут $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right)$ між напрямними векторами цих прямих.

Прямі утворюють між собою два суміжні кута; якщо один з них дорівнює φ (рис.96), то суміжний з ним дорівнює $\pi - \varphi$. Тоді один з цих

суміжних кутів $0 < \varphi = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right) < \frac{\pi}{2}$ знаходиться за формулою косинуса кута між двома векторами:

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (2.67)$$

Якщо прямі паралельні, то $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, звідки маємо умову паралельності прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.68)$$

Якщо прямі перпендикулярні, то $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, звідки випливає умова перпендикулярності прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (2.69)$$

Приклад № 48. Знайти кут між прямими

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

▲ Тут $\vec{v}_1 = (3; -1; 2)$, $\vec{v}_2 = (2; 4; -2)$. Тоді $\varphi = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right)$. За формулою (2.67), знайдемо

$$\cos \varphi = \frac{3 \times 2 - 1 \times 4 - 2 \times 2}{\sqrt{9+1+4} \sqrt{4+16+4}} = -\frac{1}{2\sqrt{21}}.$$

Отже, $\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{2\sqrt{21}} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{1}{2\sqrt{21}} \right)$ ▼

Приклад № 49. Через точку $M(1; -1; 3)$ провести пряму, яка паралельна до

прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

▲ Рівняння прямої, що проходить через точку M :

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+1}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

З умови паралельності двох прямих: $m=1, n=3, p=2$. Отже, рівняння прямої: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$. ▼

4.3. Загальні рівняння прямої

Пряма у просторі визначається як перетин двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2), \text{ де } \vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2. \end{cases} \quad (2.70)$$

Система рівнянь (2.70) називається *загальними рівняннями* прямої.

Зведення загальних рівнянь прямої до канонічних:

1) нехай у прямої (2.70), наприклад, визначник $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тоді вона перетинає площину $z=0$; знаходимо її точку перетину $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з площиною $z=0$ з системи рівнянь (2.70):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2. \end{cases}$$

2) оскільки напрямний вектор $\vec{v} = (m; n; p)$ прямої (2.70), перпендикулярний до векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, то $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (2.71)$$

Отже, загальні рівняння прямої зводяться до канонічних:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (2.72)$$

Приклад № 50. Знайти канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

▲ Із системи рівнянь послідовно виключаємо y і x . Маємо

$$\begin{aligned} & + \begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 6x - 3y + 3z - 12 = 0, \end{cases} \\ & \underline{\hspace{10em}} \\ & 7x - z = 7, \\ \text{звідки} \quad z &= \frac{x-1}{1/7}, \quad \text{і} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \begin{cases} -2x - 6y + 8z - 10 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0, \end{cases} \\ & \underline{\hspace{10em}} \\ & -7y + 9z = 14, \\ \text{звідки} \quad z &= \frac{y+2}{9/7}. \end{aligned}$$

Отже, канонічні рівняння прямої:

$$z = \frac{x-1}{1/7} = \frac{y+2}{9/7}, \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z}{7}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 51. Скласти рівняння прямої, яка проходить через

точку $A(-4; -5; 3)$ і перетинає прямі $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

▲ Маємо $\vec{s}_1(3; -2; -1)$, $\vec{s}_2(2; 3; -5)$ – напрямні вектори заданих прямих; $M_1(-1; -3; 2)$, $M_2(2; -1; 1)$ – точки, які лежать відповідно на заданих прямих.

Нехай $\vec{s}(m; n; p)$ – напрямний вектор шуканої прямої, яка проходить через точку $A(-4; -5; 3)$. Її рівняння:

$$\frac{x+4}{m} = \frac{y+5}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Визначимо m, n, p з умови, що шукана пряма перетинає дві задані прямі з напрямними векторами $\vec{s}_1, \vec{s}_2$. Це можливо, якщо вектори $\overrightarrow{M_1A}, \vec{s}_2, \vec{s}$ компланарні, а також вектори $\vec{s}_1, \vec{s}, \overrightarrow{AM_2}$ – компланарні:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \\ & \begin{cases} m \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \\ m \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -7m + 13n + 5p = 0, \\ 4m + 12p = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -3p, \\ n = -2p. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, шукані рівняння:

$$\frac{x+4}{-3p} = \frac{y+5}{-2p} = \frac{z-3}{p}, \quad \text{або} \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$\text{Відповідь:} \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 52. Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, заданих рівняннями $x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ і $x = t + 1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

▲ Запишемо параметричні рівняння заданих прямих в канонічному вигляді: $\frac{x+7}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3} = t$; $\vec{S}_1(3, -2, 3)$, $M_1(-7, 4, 4)$;
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+12}{-1} = t$; $\vec{S}_2(1, 2, -1)$, $M_2(1, -8, -12)$.

З'ясуємо, чи перетинаються ці прямі. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \text{ складений з координат векторів } \overline{M_1M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2$$

$$: \begin{vmatrix} 8 & -12 & -16 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 - 36 - 96 - 32 - 48 - 36 \neq 0,$$

отже, задані прямі схрещуються.

Побудуємо площини, що проходять через задані прямі і паралельні між собою: $A(x+7) + B(y-4) + C(z-4) = 0$ та $A(x-1) + B(y+8) + C(z+12) = 0$

. $\vec{N}(A, B, C) \perp \vec{S}_1$ і $\vec{N} \perp \vec{S}_2$:

$$\begin{cases} 3A - 2B + 3C = 0, \\ A + 2B - C = 0, \end{cases} \begin{cases} A = C - 2B, \\ 3C - 6B - 2B + 3C = 0, \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{2}{3}B, \\ C = \frac{4}{3}B. \end{cases}$$

Маємо площини:

$$-\frac{2}{3}B(x+7) + B(y-4) + \frac{4}{3}B(z-4) = 0 \quad \text{та}$$

$$-\frac{2}{3}B(x-1) + B(y+8) + \frac{4}{3}B(z+12) = 0,$$

або $2x - 3y - 4z + 42 = 0$ та $2x - 3y - 4z - 74 = 0$.

На площині $2x - 3y - 4z + 42 = 0$ виберемо точку $M(-7, 4, 4)$. Точка M лежить на прямій, яка розміщена в площині $2x - 3y - 4z + 42 = 0$ (за побудовою).

Складаємо рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на площину, яка має нормальний вектор $\vec{N}(2, -3, -4)$, що співпадає з напрямним вектором $\vec{S}$

перпендикуляра: $\frac{x+7}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-4}{-4} = t$, або $\begin{cases} x = 2t - 7, \\ y = -3t + 4, \\ z = -4t + 4. \end{cases}$

Відповідь: $x = 2t - 7$, $y = -3t + 4$, $z = -4t + 4$. ▼

§ 5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Нехай задані пряма $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, $\vec{v} = (m, n, p)$ і
площина $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C)$.

Означення 11. Кут φ між прямою і площиною називається кут між прямою і ортогональною проекцією прямої на площину (рис.97).

Позначимо через $\alpha = \left(\vec{v}, \vec{n} \right)$. Тоді $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$; $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi$
(рис.97.а). Отже, за формулою (2.58), маємо

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (2.73)$$

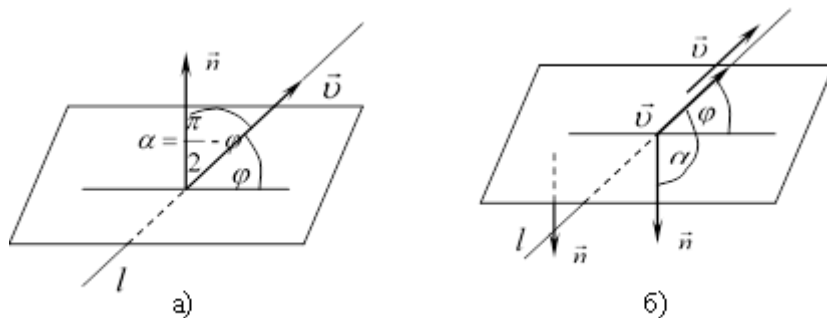


Рис. 97

Частинні випадки:

1⁰. Якщо пряма і
площина паралельні,

тоді $\varphi = 0$, $\vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. З формули (2.73) дістаємо умову паралельності
прямої і площини:

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (2.74)$$

Зокрема, якщо пряма лежить в площині, тоді

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

2⁰. Нехай пряма і площина перпендикулярні. Тоді $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\vec{v} \parallel \vec{n}$, тобто їх
відповідні координати пропорційні:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (2.75)$$

Це є умова перпендикулярності прямої і площини.

Приклад № 53. Знайти кут між прямою $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = 2 - 3x \end{cases}$ і
площиною $2x + y + z - 4 = 0$.

▲ Із загальних рівнянь прямої знаходимо

$$\begin{cases} x = \frac{y+1}{3}, \\ x = \frac{-2z+2}{3}, \end{cases}$$

$$x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-3/2}.$$

звідки дістаємо канонічні рівняння прямої

Маємо напрямний вектор прямої $\vec{v} = (1; 3; -3/2)$. Вектор $\vec{n} = (2; 1; 1)$ – нормаль площини $2x + y + z - 4 = 0$. Тоді $\varphi = (\vec{v}, \vec{n})$. За формулою (2.73):

$$\sin \varphi = \frac{|1 \times 2 + 3 \times 1 - 3/2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$



Приклад № 54. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}.$$

$M(1; 2; -1)$, перпендикулярно до прямої

▲ Рівняння площини, що проходить через точку M :

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z+1) = 0.$$

$\vec{n} = (A; B; C)$ – нормаль площини, $\vec{v} = (1; -3; 4)$ – напрямний вектор прямої. За умовою $\vec{n} \parallel \vec{v}$. Тому $\vec{n} = (1; -3; 4)$. Рівняння площини: $(x-1) - 3(y-2) + 4(z+1) = 0$, або $x - 3y + 4z + 9 = 0$. ▼

Приклад № 55. Знайти взаємне положення прямої

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

і площини $3x - 4y - z + 5 = 0$.

▲ Параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5} = t, \\ \frac{y+2}{4} = t, \\ \frac{z-1}{-1} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = 4t - 2, \\ z = -t + 1. \end{cases}$$

Підставляємо x, y, z в рівняння площини. Маємо $3(5t+1) - 4(4t-2) - (-t+1) + 5 = 15t + 3 - 16t + 8 + t - 1 + 5 = 0 \times t + 15 \neq 0$. Це означає, що пряма не перетинає площину. ▼

Зауваження. Якщо $t = a$, то підставивши в параметричні рівняння прямої замість t його значення, знайдемо координати точки перетину заданої прямої і площини.

Приклад № 56. Знайти взаємне положення прямої

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

і площини $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

▲ Із загальних рівнянь прямої знаходимо

$$\begin{cases} x = \frac{3y - 2z + 5}{5}, \\ x = \frac{y + z + 1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z - 2, \\ x = \frac{5}{9}y + \frac{7}{9}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{9} = \frac{5}{9}y, \\ x - \frac{7}{9} = 5z - \frac{25}{9}, \end{cases}$$

звідки дістаємо параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = 5t + \frac{7}{9}, \\ y = 9t, \\ z = t + \frac{5}{9}. \end{cases}$$

Підставляємо x, y, z в рівняння площини.

Маємо $4\left(5t + \frac{7}{9}\right) - 3 \times 9t + 7\left(t + \frac{5}{9}\right) - 7 = 20t + \frac{28}{9} - 27t + 7t + \frac{35}{9} - 7 = 0 \times t + 0 = 0$. Це

означає, що пряма лежить на площині. При $t = a$ маємо $M\left(5a + \frac{7}{9}; 9a; a + \frac{5}{9}\right)$ — точка, що лежить на заданій площині і через яку проходить задана пряма.



Приклад № 57. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -4; -1)$ і середину відрізка прямої $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ що розміщений між площинами $5x + 3y - 4z + 11 = 0, 5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

▲ 1. Перетворимо загальні рівняння прямої до канонічних, а потім до параметричного виду:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{Ⓢ} \\ \text{Ⓢ} \end{matrix} \begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases} & \begin{cases} 7y + 7z - 21 = 0, \\ 3x = 3y + 2z + 5, \end{cases} & \begin{cases} y = 3 - z, \\ 3x = 14 - z, \end{cases} & \begin{cases} z = 3 - y, \\ z = 14 - 3x, \end{cases} & \begin{cases} z = \frac{y-3}{-1}, \\ z = \frac{x - \frac{14}{3}}{-\frac{1}{3}}, \end{cases} \\ \frac{x - \frac{14}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}, & \frac{x - \frac{14}{3}}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{3} = t. & \text{Маємо} & \begin{cases} x = -t + \frac{14}{3}, \\ y = -3t + 3, \\ z = 3t. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Визначимо точки перетину цієї прямої з кожною із площин:

$$\text{а) } \begin{cases} x = -t + \frac{14}{3}, \\ y = -3t + 3, \\ z = 3t, \\ 5x + 3y - 4z + 11 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -t + \frac{14}{3}, \\ y = -3t + 3, \\ z = 3t, \\ -5t + \frac{70}{3} - 9t + 9 - 12t + 11 = 0, \end{cases} \begin{cases} t = \frac{5}{3}, \\ x = 3, \\ y = -2, \\ z = 5, \end{cases} \quad A(3; -2; 5).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = -t + \frac{14}{3}, \\ y = -3t + 3, \\ z = 3t, \\ 5x + 3y - 4z - 41 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -t + \frac{14}{3}, \\ y = -3t + 3, \\ z = 3t, \\ -5t + \frac{70}{3} - 9t + 9 - 12t - 41 = 0, \end{cases} \begin{cases} t = -\frac{1}{3}, \\ x = 5, \\ y = 4, \\ z = -1, \end{cases} \quad B(5; 4; -1).$$

3. Визначимо координати точки M – середини відрізка AB :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 1, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 2, \quad M(4; 1; 2).$$

4. Шукана пряма проходить через дві точки $M(4; 1; 2)$ і $M_0(2; -4; -1)$.

$$\text{Її рівняння: } \frac{x-2}{4-2} = \frac{y+4}{1+4} = \frac{z+1}{2+1}; \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}. \quad \blacktriangledown$$

Приклад № 58. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$ паралельно до площини $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає

$$\text{пряму } \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

▲ Нехай $\vec{S}_1 = (m; n; p)$ – напрямний вектор шуканої прямої l_1 , що проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$. Тоді її рівняння:

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z+4}{p}. \quad (2.76)$$

Ця пряма паралельна до площини $3x - 2y - 3z - 7 = 0$, нормальний вектор $\vec{N}$ якої має координати $\vec{N} = (3; -2; -3)$, тому $\vec{S}_1 \perp \vec{N}$:

$$3m - 2n - 3p = 0.$$

Оскільки пряма l_1 перетинається з прямою l_2 :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2},$$

направний вектор якої $\vec{S}_2 = (3; -2; 2)$, точка $M_1(2; -4; 1) \in l_2$, тому вектори $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{M_1M_0} = (1; 2; -5)$ лежать в одній площині, а отже, компланарні:

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad m \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6m + 17n + 8p = 0.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \ominus \left\{ \begin{array}{l} 6m + 17n + 8p = 0, \\ 3m - 2n - 3p = 0, \quad | \cdot 2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6m + 17n + 8p = 0, \\ 21n + 14p = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} n = -\frac{2}{3}p, \\ 6m - \frac{34}{3}p + 8p = 0, \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{5}{9}p, \\ n = -\frac{2}{3}p. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Підставимо m, n в рівняння 2.76:

$$\frac{x-3}{\frac{5}{9}p} = \frac{y+2}{-\frac{2}{3}p} = \frac{z+4}{p}, \quad \text{або} \quad \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}. \quad \blacktriangledown$$

Завдання:

Розділ 1.ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Задача 1.1. Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

за даними табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
1	-3	-2	4	4	-4	3	-4	5	-1	-2	-4	1	2	-4	2	-5
2	-2	-5	1	5	-1	-1	4	1	2	5	-3	1	4	3	-2	-2
3	3	-2	-2	5	-4	1	-4	-5	3	-3	-3	-3	3	1	5	2
4	3	4	1	-4	-2	4	4	-5	2	1	1	3	-3	-1	4	2
5	-3	4	3	1	1	-1	-1	2	-4	4	1	2	-2	3	2	4
6	-4	-2	-1	-3	-1	-4	1	2	1	2	-5	-3	-5	-4	-2	3
7	3	-3	3	4	4	-2	2	3	3	5	1	-4	-4	1	5	1
8	1	1	4	-3	3	-4	5	-1	-4	1	2	-5	-3	-2	3	-1
9	1	3	-3	5	2	2	-1	-5	-5	-3	-1	-4	1	1	-1	-4
10	-5	-5	-3	5	-4	1	1	1	2	-5	1	-2	4	3	5	-2
11	-5	-2	-2	1	1	-5	4	5	-3	3	4	1	3	-2	-1	-4
12	-2	-1	1	2	3	3	1	-1	-5	5	-3	4	-2	2	1	-1
13	-1	1	3	4	-5	1	1	1	-5	-4	2	5	-4	3	-5	-2
14	-2	-3	-1	-2	-5	-5	5	-2	4	2	-1	2	3	1	-2	3
15	-4	5	-3	3	-3	1	-5	2	2	-4	-4	3	-5	3	1	4
16	-5	-3	-1	2	1	3	1	3	2	-3	-2	-4	-3	-1	2	-5
17	-1	-3	4	-5	-1	-5	5	2	-5	1	-2	1	-3	1	3	-3
18	1	-4	-1	-1	5	-2	2	-2	4	-4	-2	-4	-2	3	2	-4
19	-5	-3	3	-4	3	-4	4	-2	3	-2	4	4	-1	1	-2	-2
20	-1	1	3	-1	1	4	-5	1	-1	-2	-3	-4	-4	3	-3	3
21	-3	1	1	1	2	4	-3	2	-2	5	3	-4	-2	5	-3	2
22	-3	-1	-2	2	1	-2	2	2	4	4	-4	1	2	3	5	-3
23	1	-5	1	-1	-4	-4	-1	5	4	5	5	4	-2	-5	-3	-3
24	-5	1	-1	3	5	4	-3	4	5	2	2	3	-2	1	-5	5
25	-3	1	-1	-4	4	-4	1	3	3	1	5	-2	3	3	5	1
26	-2	1	-2	1	3	1	1	4	1	4	-3	-5	-1	-2	4	2
27	3	-3	-1	1	-5	2	-1	2	5	1	5	4	-2	-3	-2	4
28	-4	1	1	-5	2	-3	5	1	-5	-5	4	-5	1	-1	1	3
29	-4	4	-3	1	3	4	3	5	1	-4	4	-5	3	-5	1	-3
30	-1	1	-5	-4	4	-1	3	-5	5	-5	4	1	-3	-5	-5	5

31	5	-2	-2	2	4	1	2	-3	5	5	4	-4	3	-3	5	1
32	5	5	1	-1	1	5	2	-4	-1	-2	1	-3	5	3	5	3
33	-2	2	4	3	-3	-2	4	-4	4	5	5	3	1	-2	3	4
34	-1	-5	-4	1	-4	-1	2	2	1	-5	5	-2	4	4	5	2
35	1	5	-3	3	-3	1	2	1	-5	3	-4	5	1	-3	-4	5
36	4	-1	-4	-4	3	-1	1	-1	5	-1	-5	2	5	5	-2	5
37	1	-2	-3	2	-5	2	-5	3	5	1	4	1	-4	1	1	-1
38	2	-4	1	-1	5	-3	-2	2	-1	-1	-2	1	-3	-3	-5	3
39	5	4	-4	5	-1	-2	-4	1	-1	-2	4	-3	-5	1	-5	5
40	-2	-3	-4	2	-2	1	1	-5	2	-2	-2	5	4	-2	3	1
41	1	2	-1	4	2	2	5	4	4	-4	4	5	1	1	5	3
42	-3	-4	1	-5	-3	2	-2	-4	5	1	3	4	-3	3	-5	2
43	1	-1	-5	-5	2	-1	-5	-5	5	4	-5	5	3	3	2	-1
44	-2	-5	-3	-2	2	3	4	5	3	-4	-1	-1	-1	3	-3	1
45	5	-2	-3	-1	-5	3	4	5	4	1	3	1	2	5	-3	4
46	-1	-2	-5	-5	4	4	-5	-4	3	1	5	5	-1	-2	1	2
47	-4	2	3	5	2	-4	-3	5	1	1	4	2	3	-4	-3	5
48	-1	1	-1	4	5	-4	-5	5	3	-5	-3	4	1	3	4	-2
49	2	-2	5	2	1	-5	3	1	5	3	1	-3	3	5	-5	1
50	3	-4	-1	3	-4	4	-5	-3	3	-5	1	5	-2	-3	-3	3
51	-1	-5	3	-3	1	-2	-4	3	3	4	4	-2	1	-2	-2	5
52	2	-1	-1	1	4	-1	4	1	1	3	-4	2	-5	1	-1	4
53	1	-5	1	-4	-5	1	-1	1	2	3	2	-1	1	-3	-3	5
54	1	-1	5	2	2	4	-5	-4	-5	2	-5	-4	1	-1	2	-5
55	4	1	2	4	-1	-1	3	5	-4	-2	5	-5	-4	-2	-1	4
56	4	4	3	-4	-2	3	2	-4	-4	1	-4	-4	4	-5	-3	-2
57	-2	2	5	1	-4	-3	3	-3	-5	-5	1	4	2	3	4	1
58	-3	-4	5	3	1	-3	-3	2	2	3	-1	-4	3	-5	-3	1
59	3	1	-1	-3	-5	-5	2	-5	-1	2	1	-4	-1	-4	-2	-3
60	-3	-5	-3	1	-3	4	-5	1	-4	-2	1	-5	4	-3	1	1
61	-4	2	2	-4	-3	2	4	2	-5	4	-1	2	4	-1	1	-5
62	1	-5	1	-1	-1	2	1	-5	-4	-2	4	-5	-5	-2	4	1
63	-5	2	3	2	2	-5	1	5	-5	-3	5	1	-2	-5	-2	2
64	-3	-3	-5	-4	1	5	-3	5	2	1	1	1	4	-3	2	5
65	1	1	1	3	-3	3	-4	4	-4	2	-4	5	5	-2	-3	5
66	-4	-3	-2	-4	4	4	2	1	-5	4	4	1	-1	4	-1	3
67	-2	2	-5	1	-3	-2	3	-2	2	1	5	-4	-5	-4	3	-4
68	4	1	-4	-2	-3	2	-2	4	2	-1	-3	2	1	5	5	2
69	-1	-3	1	-2	-3	4	-1	5	-2	-1	-2	5	-4	-5	1	-5
70	-4	5	-2	5	5	5	2	4	-5	1	-4	2	-4	-2	3	4
71	2	-5	-1	5	-2	1	-4	4	-1	-5	5	5	2	-4	-4	-4
72	-5	1	3	4	2	-1	4	-3	1	5	1	-3	-2	4	-4	-3
73	-3	5	-3	5	5	-4	-3	1	1	-5	-5	4	2	-2	5	-4
74	5	3	3	-5	5	2	-5	5	-4	1	-2	-2	4	1	-3	1

75	3	4	-3	2	3	-2	1	-1	1	-5	-4	4	5	4	-2	4
76	5	5	-5	2	5	-4	3	1	-5	1	2	5	5	3	-2	5
77	4	4	1	2	2	-4	-2	4	2	5	3	-2	5	-5	5	-1
78	-5	1	-4	2	-4	-4	-1	5	-1	4	-5	4	2	-5	-5	4
79	-2	5	-2	1	2	2	-1	2	-5	5	2	5	-5	1	3	2
80	2	2	-5	2	1	2	-2	3	5	-3	2	3	-5	-4	1	2
81	-4	1	5	1	3	-2	-3	-3	2	4	1	2	2	-1	-1	2
82	-1	2	-3	-3	-1	3	-2	3	-2	1	-2	1	1	-2	4	3
83	1	1	5	5	-3	-2	-4	-5	5	-4	-4	4	-1	3	-3	4
84	-2	4	1	-5	1	4	-4	-2	1	-5	4	-1	1	-2	-1	5
85	-2	-3	-5	1	-2	3	-2	5	-3	2	3	2	-3	-4	-4	-4
86	-2	-1	3	-2	-4	-4	-4	-3	-2	3	3	1	3	1	-1	2
87	2	3	-3	-5	-3	1	-3	1	-2	-1	4	-4	-3	-1	5	2
88	-5	5	3	-1	1	0	3	2	1	-2	5	-1	-3	-4	3	5
89	-4	-2	3	-1	-3	3	4	-1	2	1	-5	-4	2	-5	-4	4
90	-3	-2	5	1	-2	-5	-3	-5	3	1	-2	5	3	5	-5	1
91	-4	3	5	-4	-1	-3	-4	4	-1	4	5	-2	-4	-4	1	1
92	-2	-4	1	3	4	-3	-3	-5	-4	2	2	3	3	5	1	-2
93	-1	-5	3	3	-5	3	-1	1	-4	4	-2	4	-2	5	-1	2
94	4	3	4	1	-1	1	-5	-1	-3	-5	4	-1	-5	-3	-4	1
95	-3	-3	-3	1	1	2	5	-4	-1	-3	2	4	1	-3	-2	-5
96	4	-5	1	5	1	2	1	-2	-2	-2	5	-4	5	-2	-2	2
97	3	4	1	1	-5	1	-1	-3	2	3	5	4	-5	4	2	5
98	-3	4	4	3	2	2	-5	4	5	-1	1	1	-1	-5	-1	1
99	3	-2	5	-2	3	-1	-3	5	1	-4	-1	3	-4	1	-5	4
100	-4	-5	4	-4	2	-3	-3	4	-4	1	-5	-4	-2	-4	-1	-5

Задача 1.2. Знайти матриці, обернені до матриці

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

за даними табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	-4	-4	-5	1	2	-2	2	-5	-5
3	5	4	5	1	1	-3	-1	2	1
4	3	1	-2	-2	3	5	-2	-2	-4
5	-4	-3	3	1	-3	1	3	-3	5
6	1	-1	4	3	-4	4	4	-2	-5
7	1	-3	2	1	-1	4	1	4	-3
8	1	-1	-4	2	-1	4	1	2	1

9	-2	3	1	3	5	-1	2	-4	-3
10	-4	-1	-3	1	2	1	2	-5	-4
11	3	-3	4	1	3	-2	3	4	2
12	3	1	5	5	-4	1	1	5	-2
13	1	1	-1	4	-4	-4	-3	5	4
14	-5	3	1	-3	-1	3	-2	1	-3
15	1	-5	-1	2	-5	-4	-1	-3	1
16	1	-5	5	-4	-5	-4	-2	-3	1
17	-3	1	3	2	-2	5	-5	1	-2
18	-5	1	4	1	1	5	-2	-5	-3
19	4	-2	-5	4	-1	-2	3	1	-1
20	2	1	5	3	-1	1	3	-5	4
21	1	4	3	1	-1	4	-1	-3	-5
22	1	1	-4	1	2	3	-5	5	-5
23	2	-1	-5	-2	-2	5	1	-5	-2
24	2	3	3	-1	2	-3	2	1	-4
25	-3	-2	2	1	-5	-4	-3	2	-4
26	1	4	-3	3	3	-1	1	-5	2
27	1	2	-4	-4	-3	-3	3	-2	-1
28	1	-3	-1	4	4	-5	-1	-5	5
29	-5	3	3	1	-3	-3	-2	1	-5
30	-4	5	1	-1	-2	4	-1	2	-4
31	-4	2	-5	-2	-4	-3	3	1	1
32	1	-2	4	-4	3	4	4	-2	-1
33	-2	-1	-1	-2	1	1	-2	1	4
34	-3	-3	3	-1	-4	-3	-2	1	3
35	-3	-1	-3	1	2	2	1	4	-2
36	3	5	1	-4	-3	-3	-2	2	-1
37	1	2	4	-2	2	-4	-2	4	1
38	3	1	2	5	1	-1	-3	1	-4
39	-1	5	-2	5	1	-5	4	4	-3
40	4	-1	4	-5	3	-3	1	5	4
41	2	1	5	2	-3	-3	3	-5	-3
42	-1	1	3	-4	1	1	4	3	5
43	3	1	1	3	2	-2	5	-2	-5
44	1	1	-5	1	4	-1	1	-3	-2
45	2	-3	-5	5	1	2	3	1	-1
46	5	4	-2	-3	-2	4	5	1	-3
47	1	2	1	1	-3	-5	-5	5	-5
48	1	4	-4	1	3	4	-1	-3	-3
49	3	5	4	4	1	-5	3	-4	1
50	-5	-1	-4	1	-4	4	-4	-5	-1
51	1	4	-5	5	1	-5	-5	-3	5
52	5	2	2	-2	4	-3	1	-5	5
53	1	-3	3	-4	5	5	3	1	5

54	-1	2	-2	4	-4	1	5	1	-3
55	3	1	1	5	-2	3	3	2	-3
56	4	5	4	1	5	-2	4	3	3
57	-1	-4	1	-1	1	2	-5	-4	2
58	-5	4	2	5	4	-2	1	5	1
59	-3	-2	-5	3	3	3	-3	1	-4
60	1	5	-1	1	2	-4	-4	4	-4
61	-1	1	2	-3	-1	5	-1	-5	5
62	5	-2	-5	4	1	2	1	2	-5
63	1	4	1	1	-4	-1	4	1	-5
64	-4	5	1	1	-3	-1	-1	-2	-1
65	-1	-5	5	-3	3	4	-3	1	-4
66	1	1	4	-2	-1	-3	-4	-2	-5
67	1	-2	2	5	-3	-2	-2	-4	1
68	-5	-2	-2	2	5	3	-2	4	1
69	1	4	5	2	2	4	-1	2	2
70	1	4	-3	5	5	-3	1	3	-4
71	-5	-2	-4	-3	-4	1	2	5	4
72	3	-2	1	-5	-4	-5	2	-1	2
73	-5	4	1	-5	-5	3	5	5	2
74	1	-3	3	-2	1	4	-5	2	5
75	-4	1	-2	-1	3	-5	-1	-3	5
76	-3	1	4	-1	4	5	-5	5	3
77	2	4	-2	5	1	-5	-3	-1	-5
78	1	3	5	-5	-1	-1	-4	5	-2
79	2	2	2	-2	3	-4	1	5	-3
80	1	1	-3	-2	3	5	4	-4	-2
81	-3	5	5	-1	1	3	4	-5	5
82	1	4	2	1	-2	-2	3	3	5
83	4	1	1	-5	5	-3	3	1	3
84	-5	3	3	1	-4	-4	1	1	4
85	-3	-5	-3	3	6	-3	-5	-2	1
86	-1	-3	-4	1	1	3	3	-2	3
87	4	-2	1	-2	-2	2	1	5	-1
88	4	4	3	4	1	-4	-2	1	1
89	1	5	1	-1	1	-4	1	-5	-5
90	-1	3	1	1	2	-3	1	-1	-3
91	3	5	4	-3	2	-5	-1	2	1
92	2	1	-5	-5	-1	1	-4	2	4
93	2	-1	-4	4	3	-2	-1	5	1
94	-4	4	4	-2	1	3	-1	4	-4
95	3	-4	-4	2	1	4	-4	-4	-5
96	-2	2	-4	-3	5	1	-2	1	3
97	-5	4	4	-5	1	-3	1	3	-5
98	-4	1	1	5	-3	2	3	-3	3

99	-4	-3	3	3	2	1	-5	-5	-1
100	-5	-5	1	-5	-1	-4	2	2	1

Задача 1.3. Дослідити та розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = B_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = B_3 \end{cases}$$

за даними табл. 1.3. Знайти загальний та базисний розв'язки.

Таблиця 1.3

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
1	3	1	-3	6	1	-2	-1	2	4	6	-4	8	12	-3	30
2	4	12	3	-8	-1	-3	5	2	10	30	-4	-20	-1	6	-14
3	1	-1	-1	-2	2	-2	-2	2	9	-9	-9	0	1	8	27
4	-2	2	-2	4	5	-2	5	-10	-12	6	-12	24	-10	16	-42
5	-3	3	3	3	-2	2	-4	2	10	-10	2	-10	-15	-4	38
6	2	-2	-2	3	-1	1	1	2	-4	4	4	1	6	11	16
7	-1	-2	-1	2	5	2	5	-10	-13	-10	-13	26	-10	18	-66
8	1	1	5	-1	2	2	1	-2	1	1	-4	-1	18	0	-18
9	1	1	-2	-3	5	5	-10	2	-8	-8	16	-10	0	17	-34
10	-2	-4	4	4	-3	-1	6	6	2	-6	-4	-4	-8	-7	-2
11	-3	-6	2	-9	-1	-2	-3	-3	5	10	4	15	15	-6	-3
12	1	-1	3	-3	5	-5	15	-4	-11	11	-33	11	-7	-13	33
13	-4	-1	4	4	3	-2	-3	-3	2	-5	-2	-2	5	-12	-19
14	5	5	-1	15	1	1	-4	3	13	13	5	39	19	0	57
15	-4	-4	-12	-1	1	1	3	5	-9	-9	-27	-7	-10	12	-32
16	1	4	-1	1	1	1	-1	1	-2	-5	2	-2	0	3	-3
17	-3	-9	1	3	-2	-6	1	2	-2	-6	0	2	-5	-3	-4
18	4	-8	8	-2	5	-10	10	-4	2	-4	4	-4	-8	-7	2
19	1	1	2	3	-2	3	-4	-6	6	-4	12	18	-1	12	-26
20	-2	-4	5	2	4	8	2	-4	-6	-12	-9	6	16	-8	0
21	5	-5	5	1	5	-5	5	-2	20	-20	20	-5	9	-3	0
22	2	2	4	-4	-4	3	-8	8	-8	-1	-16	16	4	13	5
23	3	6	4	6	-1	-2	5	-2	7	14	22	14	0	-19	-38
24	2	2	-4	-4	-3	-3	6	-3	-8	-8	16	-2	-8	-15	-22
25	-2	-2	-6	-2	4	2	12	4	-10	-8	-30	-10	0	2	-2
26	-2	-4	-3	-6	-1	-2	-4	-3	0	0	-5	0	-13	-14	-15
27	-3	-9	6	1	5	15	-10	-2	-4	-12	8	1	-5	8	-7
28	-2	4	2	-2	-4	3	4	-4	-8	1	8	-8	-10	-10	-10
29	-3	-9	2	-9	5	15	-2	15	11	33	-6	33	-13	19	45
30	-3	-6	-9	5	-4	-8	-12	-2	14	28	42	-6	-9	14	-10
31	-1	-3	-1	-2	5	4	5	10	8	2	8	16	10	-17	-14
32	3	3	-1	-3	1	1	4	-1	-5	-5	6	5	-4	3	11
33	-2	-6	-4	5	5	15	10	5	-14	-42	-28	0	-8	-15	14

34	-1	2	1	-1	-3	-3	3	-3	-6	3	6	-6	7	-6	15
35	1	3	-2	-1	1	3	3	-1	2	6	11	-2	6	1	-3
36	3	3	6	1	2	2	4	-2	15	15	30	-3	-8	-8	-48
37	1	1	-1	-1	2	-4	-2	-2	5	-7	-5	-5	-1	-8	-17
38	-4	-4	-4	-4	-1	-1	2	-1	-6	-6	-12	-6	-28	2	-60
39	-4	-8	-8	-2	3	6	6	5	5	10	10	13	-8	-1	-11
40	5	2	15	-10	-4	2	-12	8	-3	6	-9	6	-17	10	3
41	-4	-4	-4	-8	1	1	-1	2	-7	-7	-9	-14	8	-4	12
42	2	4	4	4	3	6	6	3	7	14	14	5	-6	0	6
43	4	-2	-12	-4	-3	-2	-9	3	2	-8	6	-2	4	-10	-12
44	-1	1	4	-1	3	-3	4	3	-4	4	-16	-4	7	11	-36
45	2	6	4	4	2	6	4	-3	8	24	16	-5	-8	13	31
46	-1	-3	-2	-2	3	-1	6	6	11	3	22	22	5	-5	-25
47	-2	2	2	-4	-1	1	4	-2	0	0	-6	0	-4	-11	18
48	-1	-1	-3	-3	-1	-1	-3	3	-2	-2	-6	12	-4	2	10
49	-1	2	-2	-2	1	3	2	2	0	5	0	0	3	2	5
50	-2	-2	-1	4	5	5	1	-10	9	9	3	-18	-2	8	12
51	3	-6	9	-1	3	-6	9	-2	3	-6	9	0	3	0	6
52	4	4	8	4	-1	-2	-2	-1	9	10	18	9	-4	4	-12
53	-4	-4	-2	4	5	5	-1	-5	14	14	0	-14	6	-11	-28
54	1	-2	-1	2	-4	8	4	-4	-1	2	1	2	5	-8	7
55	-1	-4	-1	-3	-2	-3	-2	-6	0	5	0	0	-14	-8	20
56	2	-4	2	4	2	-4	4	4	2	-4	6	4	10	16	22
57	4	12	4	-2	5	15	5	5	19	57	19	13	-12	0	-12
58	-1	-4	1	-3	1	-4	-1	3	-3	4	3	-9	-6	-2	-2
59	3	-3	-1	-3	5	-5	-2	-5	8	-8	-3	-8	7	12	19
60	5	10	5	5	-2	-4	-2	4	1	2	1	13	10	-16	-22
61	-3	2	6	-3	3	3	-6	3	12	7	-24	12	5	-15	-50
62	2	-2	-2	-2	-4	4	5	4	-8	8	9	8	-4	9	17
63	-1	2	2	1	4	-8	-8	1	-7	14	14	-3	5	-5	5
64	-4	2	-8	-12	4	1	8	12	0	-3	0	0	16	-10	-6
65	2	-4	-1	2	-2	4	4	-2	2	-4	-7	2	7	-16	25
66	3	9	-3	5	-2	-6	2	-2	7	21	-7	9	17	-10	37
67	4	-4	-4	12	3	3	-3	9	10	2	-10	30	-12	-3	-18
68	-4	-4	-3	-12	-3	-3	-4	-9	-6	-6	-1	-18	-8	-13	2
69	-3	-9	3	5	4	12	-4	4	-17	-51	17	7	14	24	-6
70	5	1	10	5	5	3	10	5	0	-2	0	0	-16	-18	2
71	-3	-6	5	-6	-2	-4	-4	-4	-7	-14	19	-14	6	-18	36
72	5	5	10	5	1	1	2	4	11	11	22	14	10	-4	16
73	5	4	10	5	3	3	6	3	18	15	36	18	11	9	42
74	5	15	3	5	-1	-3	-4	-1	17	51	17	17	24	-15	102
75	4	12	12	-2	-2	-6	-6	-4	-2	-6	-6	6	6	2	-8
76	-3	2	6	3	1	4	-2	-1	6	10	-12	-6	9	11	24
77	-1	-1	3	-1	4	4	2	4	-6	-6	-10	-6	12	-6	-12
78	-1	1	2	4	-4	4	8	4	2	-2	-4	4	-5	4	-14

79	2	2	-4	6	-3	5	6	-9	-10	6	20	-30	0	8	16
80	-2	4	-2	-4	-1	2	3	-2	3	-6	7	6	-4	-6	2
81	1	-2	3	2	-1	2	-3	2	-1	2	-3	10	-8	-4	-28
82	5	-4	15	15	3	-4	9	9	4	-8	12	12	18	14	24
83	2	-2	4	-4	-3	3	-3	6	-2	2	2	4	0	-6	-12
84	-4	8	-4	4	4	-8	4	-2	0	0	0	-2	12	-4	-8
85	2	-2	-4	6	-1	-4	2	-3	-1	6	2	-3	2	-11	9
86	-4	-12	3	-8	4	12	-1	8	-8	-24	8	-16	-2	-2	-8
87	3	-3	-3	2	-1	1	1	5	8	-8	-8	11	6	-19	-1
88	4	3	8	-8	-1	1	-2	2	-11	-3	-22	22	-5	-4	-2
89	5	-10	-4	15	2	-4	5	6	-9	18	-6	-27	7	16	-39
90	5	15	-5	2	-4	-12	4	-4	-2	-6	2	-8	-12	12	12
91	-2	-1	-2	2	4	4	4	-4	6	5	6	-6	5	-16	-21
92	-1	1	2	2	3	-3	3	-6	4	-4	1	-8	10	6	-4
93	5	10	-10	-2	-2	-4	4	3	11	22	-22	0	-13	3	-33
94	1	-2	3	-2	-4	-2	-12	8	-13	-4	-39	26	-7	8	31
95	-4	-8	1	8	4	8	4	-8	16	32	6	-32	-1	16	34
96	2	-2	2	3	5	-5	5	4	-8	8	-8	-5	12	23	-34
97	1	1	-1	-2	4	5	-4	-8	11	13	-11	-22	2	7	20
98	1	3	3	-1	-1	-3	-2	1	-2	-6	-5	2	-8	6	14
99	5	-5	10	-1	-2	2	-4	2	-9	9	-18	5	-19	14	47
100	5	-1	-5	15	-1	3	1	-3	-8	10	8	-24	-8	-4	-4

Задача 1.4. Розкласти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ за векторами базису $\bar{a}_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$, $\bar{a}_2 = (A_{21}, A_{22}, A_{23})$, $\bar{a}_3 = (A_{31}, A_{32}, A_{33})$.

Задачу розв'язати методом Жордана-Гаусса за даними табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-25	-20	3	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	22	-8	-21	-3	5	4	4	-3	-2	-2	-5	1
3	-19	-10	-1	4	1	4	1	-3	3	2	1	-2
4	9	-7	-6	5	-4	-5	4	-3	-1	2	1	-5
5	-6	-3	-15	3	2	4	1	1	-1	5	3	-4
6	-13	4	-13	-3	1	-5	-1	1	1	1	-4	-3
7	-1	-6	8	1	1	2	3	-1	-4	2	-1	4
8	-1	22	-13	2	2	3	2	-3	4	1	-5	5
9	7	-23	10	2	-5	1	-1	-3	-2	2	-5	3
10	-10	-8	-19	-3	-5	-2	-2	2	-2	1	1	-3
11	23	10	-16	5	-2	4	5	1	-3	1	1	1
12	-8	13	-26	4	1	2	-1	-4	5	3	4	4
13	-19	13	7	-3	2	-5	5	-1	-3	2	-5	1
14	0	-19	-7	1	5	1	3	-4	-4	-5	-5	-3
15	11	-2	27	2	-2	5	-5	4	-2	1	1	5

16	4	-9	15	2	-2	1	2	-3	2	4	-4	-2
17	6	3	5	1	-2	2	-4	-1	3	-5	4	3
18	20	-4	-8	-2	-5	4	-5	1	2	1	3	-3
19	-3	-6	5	4	1	-4	-5	1	2	1	-5	1
20	6	-9	7	-3	3	5	2	3	-5	3	3	1
21	-1	6	11	2	3	3	-1	2	-3	2	1	-4
22	-20	-22	17	-4	-2	1	5	1	-2	4	5	-4
23	-27	17	-15	4	-3	1	1	-1	3	-5	2	-4
24	4	-27	-4	-3	1	-2	5	1	-4	-3	4	4
25	10	-2	-6	1	2	-2	-5	-5	3	5	1	-3
26	-15	2	2	1	-4	-5	-3	4	1	-4	2	5
27	-5	25	-7	-2	3	1	1	2	-5	-2	-4	-3
28	-9	3	-2	3	1	-3	-1	4	-3	1	3	2
29	-7	8	19	-2	1	4	-1	-1	-5	1	1	-3
30	11	13	16	-4	-3	-3	1	-2	-3	-2	2	2
31	-1	-11	-11	4	-2	-4	-3	5	1	2	3	5
32	-2	15	12	-3	1	2	-4	5	2	4	4	3
33	11	1	-5	1	5	1	2	-3	-5	3	1	2
34	-10	-7	-25	-5	-2	-5	2	1	5	-2	-2	-5
35	6	-16	-11	-5	3	-3	1	5	4	-1	4	5
36	-14	-4	26	-4	-2	1	3	-4	5	-5	4	3
37	1	-6	5	1	1	3	3	5	3	3	-2	5
38	33	-6	-2	2	-3	1	4	-2	-2	3	1	1
39	26	1	13	-1	2	-3	-2	5	-1	4	3	1
40	-5	-10	14	3	-1	5	2	1	4	-3	-4	2
41	7	-11	-23	1	2	1	1	-3	-5	-5	5	-5
42	4	-13	-9	5	-5	-3	2	1	1	-2	-3	2

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
43	5	40	-2	5	4	-5	1	-5	-5	-4	3	1
44	1	25	-19	-5	-3	1	-4	2	-3	-3	5	-3
45	40	-16	12	-5	2	-2	-5	5	2	5	1	4
46	8	-40	8	2	-5	-1	-2	1	-1	-2	-4	2
47	-13	18	3	1	5	-1	-1	2	1	4	-4	1
48	-5	16	-5	1	4	-1	-3	2	5	-2	3	-4
49	55	31	23	4	3	1	5	4	4	5	-2	-1
50	-28	8	2	1	1	4	5	1	-1	-5	5	-5
51	18	-1	15	5	1	3	2	5	-3	-2	-3	-2
52	-2	-29	12	-4	-3	2	5	-4	1	1	5	-1
53	9	38	-7	-5	1	-1	4	-5	1	3	4	-1
54	-13	3	13	4	-3	2	1	2	-5	1	-5	3
55	0	0	-10	-2	2	-2	1	5	4	-1	4	-2
56	12	1	2	-3	-1	-1	-2	-1	-3	2	-2	1
57	9	31	11	-3	-3	5	-1	-5	-2	1	4	4
58	11	-24	10	1	-5	-2	-5	5	-3	1	-2	-4
59	2	11	-10	2	4	-2	3	4	-5	-2	1	2
60	9	0	6	1	4	5	2	2	4	-1	2	2

61	-2	-16	4	-2	-1	4	2	5	-2	-1	5	1
62	11	-7	-14	1	-4	-3	-4	3	3	5	4	-5
63	-40	20	-20	-4	-1	-5	4	4	-1	-4	5	1
64	-8	4	11	3	-1	-5	1	1	-3	2	-2	-1
65	-5	-7	-9	-3	-5	3	-3	3	5	1	4	-4
66	1	-22	-32	-2	-5	5	1	2	4	-1	4	5
67	-16	28	-8	1	1	3	-5	3	-3	-1	4	-2
68	-7	32	-15	-4	5	-2	3	1	1	-1	-1	2
69	2	3	-9	2	5	1	-2	-4	4	-3	2	2
70	-36	-10	15	-4	-2	-1	-3	-1	4	5	-3	1
71	31	2	-15	-2	1	-2	5	1	-3	-4	2	2
72	-14	9	-11	5	-5	5	2	3	1	4	1	1
73	-19	2	4	-4	1	2	-2	1	-5	3	-4	-1
74	-9	-3	10	3	1	-3	-5	-2	3	-5	-3	-4
75	-30	-4	3	5	1	-2	-3	-1	-2	3	-3	-5
76	-13	1	-20	-2	2	4	5	-1	4	1	-1	-1
77	1	7	15	2	4	1	4	-3	-2	1	4	-3
78	35	8	-9	-4	1	3	-5	1	2	5	2	-1
79	-4	-10	-2	3	5	4	-3	2	-5	-1	2	1
80	3	-5	27	1	2	2	-2	5	-5	3	-2	-3
81	-1	3	-11	2	2	1	-4	-5	4	-5	-5	2
82	38	-10	-28	4	-2	-4	3	3	-4	-4	2	1
83	16	-12	8	-5	4	3	-4	3	-2	-4	1	4
84	-13	5	5	-3	1	3	-5	4	4	-5	2	1
85	0	2	-2	-2	5	1	-2	4	2	1	1	-5
86	29	13	13	-5	-5	-1	-3	3	-3	2	1	1
87	8	-12	8	-4	4	-4	2	-5	4	1	1	-1
88	0	-26	15	-3	4	-4	1	-5	-2	-3	1	1
89	-2	-2	6	4	1	4	-1	-3	-4	5	2	1
90	8	22	-14	-5	2	4	4	4	-5	-1	-1	1
91	33	32	-7	4	2	-4	5	4	1	1	-5	-5
92	11	19	-5	1	-5	2	1	2	2	2	3	-5
93	-26	17	-13	-5	5	3	-2	4	4	-4	1	-5
94	-30	-10	-4	-4	-3	1	1	5	-5	5	1	1
95	-7	11	16	3	1	4	-3	3	-1	-5	1	3
96	28	0	-7	2	5	5	-4	-2	1	5	-3	-4
97	-10	23	-19	-3	2	-1	1	5	-4	2	-3	3
98	16	1	-5	3	1	-3	-5	-5	-2	-2	3	3
99	-15	-27	-6	2	-4	-1	-4	-2	-1	1	5	-2
100	18	-2	14	-3	4	-3	2	2	2	1	-1	2

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Задача 2.1. Дано координати вершин піраміди $A_1(x_1, y_1, z_1)$ $A_2(x_2, y_2, z_2)$ $A_3(x_3, y_3, z_3)$ $A_4(4, 0, 5)$. За даними табл. 2.1 знайти:

- а) довжину ребра A_1A_2 ;
- б) площу грані $A_1A_2A_3$;
- в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 ;
- г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
- д) напрямні косинуси вектора A_1A_4 .

Таблиця 2.1

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	1	-2	3	3	2	1	6	4	4
2	0	0	2	3	0	5	1	1	0
3	3	0	5	0	0	2	4	1	2
4	1	1	0	4	1	2	0	0	2
5	4	1	2	1	1	0	3	0	5
6	3	1	0	0	7	2	-1	0	-5
7	1	-1	1	0	2	4	1	3	3
8	1	-1	2	2	1	1	1	1	4
9	1	-3	2	5	1	-4	2	0	3
10	3	5	3	-2	11	-5	1	2	4

Задача 2.1-1. Дано довжини a, b, c ребер OA, OB, OC прямокутного паралелепіпеда. За даними табл. 2.1-1 знайти:

- а) площу трикутника, утвореного діагоналями, які виходять з точки O , граней AOB і BOC ;
- б) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$;
- в) кут ABC ;
- г) довжину діагоналі паралелепіпеда;
- д) об'єм піраміди $OABC$.

Таблиця 2.1-1

Номер варіанта	a	b	c
11	4	2	3
12	3	1	4
13	3	2	5
14	2	3	4
15	5	2	3
16	4	2	4
17	3	3	2
18	2	1	5

19	6	3	5
20	2	5	4

Задача 2.1-2. Дано три послідовні вершини паралелограма A, B, C . За даними табл. 2.1-2 знайти:

- а) координати вершини D ;
- б) площу трикутника ABC ;
- в) довжину діагоналі AD ;
- г) кут ABC ;
- д) об'єм піраміди $OABC$.

Таблиця 2.1-2

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
21	1	-2	3	3	2	1	6	4	4
22	0	0	2	3	0	5	1	1	0
23	3	0	5	0	0	2	4	1	2
24	1	1	0	4	1	2	0	0	2
25	4	1	2	1	1	0	3	0	5
26	3	1	0	0	7	2	-1	0	-5
27	1	-1	1	0	2	4	1	3	3
28	1	-1	2	2	1	1	1	1	4
29	1	-3	2	5	1	-4	2	0	3
30	3	5	3	-2	11	-5	1	2	4

Задача 2.1-3. На векторах $\vec{m} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, $\vec{n} = c \cdot \vec{j} + d \cdot \vec{k}$, $\vec{p} = k \cdot \vec{j} + l \cdot \vec{k}$

побудовано паралелепіпед ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти відповідної системи координат). За даними табл. 2.1-3 знайти:

- а) об'єм паралелепіпеда;
- б) площу грані, побудованої на векторах $\vec{m}$ і $\vec{n}$;
- в) довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ і $\vec{p}$;
- г) кут між стороною $\vec{m}$ і діагоналлю грані, утвореної векторами $\vec{m}$ і $\vec{p}$.

Таблиця 2.1-3

Номер варіанта	a	b	c	d	k	l
31	1	2	3	-1	-2	-4
32	2	1	2	3	-1	-2
33	3	2	1	2	3	-1
34	4	3	2	1	2	-3
35	5	4	3	2	1	-2
36	6	5	4	3	2	-1

37	7	6	5	4	3	-2
38	8	7	6	5	4	-3
39	9	8	7	6	5	-4
40	0	1	2	3	-1	-2

Задача 2.1-4. Паралелограм побудовано на векторах $\vec{a} = m\vec{p} + n\vec{q}$ і $\vec{b} = s\vec{p} + r\vec{q}$, де $\vec{q}$ і $\vec{p}$ — одиничні орти, кут між якими $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. За даними табл. 2.1-4 знайти:
а) довжини діагоналей;
б) кут між діагоналями.

Таблиця 2.1-4

Номер варіанта	m	n	s	r
41	1	2	-2	1
42	2	3	-3	2
43	3	4	4	3
44	-1	2	-2	3
45	-2	3	1	2
46	1	2	-3	2
47	-2	3	2	1
48	2	3	1	3
49	-2	3	3	2
50	0	1	2	3

Задача 2.1-5. Відомо, що вектори $\vec{AB} = m\vec{i} + n\vec{j}$, $\vec{BC} = p\vec{i} + q\vec{j}$ є сторонами деякого трикутника. Обчислити кути трикутника і довжину медіани AD , якщо $\vec{i}$ і $\vec{j}$ — орти відповідної системи координат.

Таблиця 2.1-5

Номер варіанта	m	n	p	q
51	2	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}$
52	3	4	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$
53	2	$5\sqrt{2}$	7	$\sqrt{5}$
54	5	$2\sqrt{3}$	1	6
55	6	$3\sqrt{2}$	7	$-\sqrt{5}$
56	$4\sqrt{2}$	-2	6	0
57	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$
58	3	-4	$\sqrt{7}$	$3\sqrt{2}$
59	2	$-5\sqrt{2}$	7	$-\sqrt{5}$
60	2	-3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}$

Задача 2.1-6. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = b\vec{m} + s\vec{n}$ на вісь, яка має напрям $\vec{b} = p\vec{m} + q\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими $(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$.

Таблиця 2.1-6

Номер варіанта	b	s	p	q
61	10	2	5	-12
62	2	5	4	3
63	3	5	15	8
64	4	7	-8	6
65	-3	2	10	24
66	3	-3	-4	3
67	3	5	16	-12
68	-3	8	-3	4
69	3	7	12	-5
70	5	-4	20	-15

Задача 2.1-7. Перевірити на компланарність вектори $\vec{p} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{q} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, $\vec{r} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти відповідної системи координат. За даними табл. 2.1-7 обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

Таблиця 2.1-7

Номер варіанта	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
71	1	-2	1	3	1	-2	7	14	-13
72	1	0	1	2	-3	2	2	-6	2
73	2	-1	3	3	-5	1	7	-7	7
74	3	2	-3	5	2	2	11	8	2
75	2	-3	4	0	1	2	2	-1	6
76	1	2	-3	2	2	1	4	6	-5
77	1	-1	2	0	2	-3	2	0	1
78	0	1	1	1	2	2	4	9	9
79	2	-2	1	3	1	2	1	3	1
80	1	-1	2	2	-1	1	4	-3	5

Задача 2.1-8. Дано вектор $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти відповідної системи координат. За даними табл. 2.1-8 знайти:

- довжину вектора $\vec{p}$;
- напрямні косинуси вектора $\vec{p}$;
- проекцію вектора $\vec{p}$ на вектор $\vec{q} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

Таблиця 2.1-8

Номер варіанта	a	b	c
81	2	3	6
82	3	6	-2
83	6	-3	2
84	5	2	1
85	4	3	-2
86	2	1	-3
87	3	3	4
88	-2	5	1
89	3	3	-2
90	4	2	-3

Задача 2.1-9. Дано вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. За даними табл. 2.1-9 знайти:

- довжину вектора;
- одичинний вектор, паралельний вектору $\vec{a}$;
- одичинний вектор, перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ та до осі Ox ;
- проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} = (2; 3; -6)$.

Таблиця 2.1-9

Номер варіанта	a_1	a_2	a_3
91	6	7	-6
92	3	2	6
93	-2	3	-6
94	3	2	1
95	2	2	3
96	3	4	5
97	2	-5	5
98	2	-3	4
99	3	-2	4
100	2	3	5

Задача 2.2. Дано координати $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$, $C (x_3, y_3)$ вершин трикутника ABC . За даними табл. 2.2 знайти:

- довжину сторони BC ;
- рівняння сторони BC ;
- рівняння висоти, проведеної з точки A ;
- довжину висоти, проведеної з точки A ;
- рівняння бісектриси внутрішнього кута B ;
- площу трикутника;
- кут B в радіанах з точністю до двох знаків.

Таблиця 2.2

Номер варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	7	1	-5	-4	-9	-1
2	9	3	-3	-2	-7	1
3	13	-6	1	-1	5	2

4	10	-5	-2	0	2	3
5	6	1	-6	-4	-10	-1
6	-1	5	11	0	17	8
7	-4	7	8	2	14	10
8	-7	2	5	-3	11	5
9	-9	8	3	3	9	11
10	2	5	-10	0	-14	3

Задача 2.2-1. Дан рівняння двох сторін $AB: ax + by + c = 0$ і $AC: mx + ny + p = 0$, а також точку перетину медіан $M(s, q)$. За даними табл. 2.2-1 знайти:

- рівняння третьої сторони;
- відстань від точки B до прямої AC ;
- кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
- точку перетину висот трикутника.

Таблиця 2.2-1

Номер варіанта	a	b	c	m	n	p	s	q
11	5	-8	10	1	-10	-2	4	2
12	7	-5	12	1	-17	-8	3	3
13	7	-3	4	1	9	8	3	1
14	1	-1	-1	1	11	-1	7	2
15	5	-8	3	1	-10	7	7	3
16	1	7	-7	7	-3	3	4	3
17	4	-7	10	4	1	-14	5	2
18	7	1	1	5	-7	-7	2	4
19	4	1	1	1	-2	-2	2	4
20	9	-2	2	7	3	-3	4	-1

Задача 2.2-2. Дано координати двох вершин $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ трикутника ABC , а також точку $M(x_3, y_3)$ перетину висот. За даними табл. 2.2-2 знайти:

- рівняння сторін цього трикутника;
- координати третьої його вершини;
- тангенс кута A ;
- довжину висоти BD ;
- площу трикутника;
- точку перетину медіан.

Таблиця 2.2-2

Номер варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
21	-3	3	5	-1	4	3
22	-2	2	6	0	3	2
23	-3	-1	5	-5	4	-1

24	2	-1	10	-5	9	-1
25	0	2	8	-2	7	2
26	-3	0	5	-4	4	0
27	-1	1	7	-3	6	1
28	0	3	8	-1	7	3
29	-1	5	7	1	6	5
30	0	0	8	-4	1	0

Задача 2.2-3. Дано рівняння однієї зі сторін квадрата $ax + by + c = 0$ і точку перетину діагоналей $M(d, l)$. За даними табл. 2.2-3 знайти:

- рівняння решти сторін і координати вершин;
- довжину сторони квадрата;
- найбільшу відстань від вершини квадрата до початку координат.

Таблиця 2.2-3

Номер варіанта	a	b	c	d	l
31	1	3	-5	-1	0
32	3	4	-5	0	1
33	5	12	-13	2	2
34	6	8	-5	-1	-1
35	15	8	-34	3	1
36	2	3	-6	1	-1
37	-3	4	10	1	1
38	-5	12	13	0	-2
39	12	-5	-13	2	-3
40	-6	8	16	0	0

Задача 2.2-4. Відомо рівняння двох сторін паралелограма $AB: a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $AD: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Діагоналі паралелограма перетинаються в точці $M(d, l)$. За даними табл. 2.2-4 знайти:

- рівняння діагоналей;
- довжини висот паралелограма;
- кут BAD паралелограма;
- площу паралелограма;
- рівняння висоти, опущеної з точки A на діагональ BD .

Таблиця 2.2-4

Номер варіанта	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	d	l
41	1	1	-1	0	1	1	-1	0
42	3	2	3	1	-1	1	4	0
43	2	3	-1	2	-1	3	3	1

44	1	1	2	1	-1	0	2	-1
45	-2	3	-1	2	3	-5	4	1
46	-1	2	-1	1	2	-3	5	1
47	3	-2	-1	1	-2	1	0	3
48	1	1	-1	0	1	1	1	0
49	2	3	-1	-2	1	-3	1	3
50	1	1	-2	2	3	-5	4	1

Задача 2.2-5. Дано рівняння прямої $ax + by + c = 0$ і точку $M(d, l)$. За даними табл. 2.2-5 знайти:

- рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до даної прямої;
- координати точки M_1 , симетричної точці M , відносно даної прямої;
- рівняння прямої, яка проходить через точку M під кутом 45° до даної прямої;
- площу квадрата, сторона якого лежить на даній прямій і однією з вершин якого є точка M .

Таблиця 2.2-5

Номер варіанта	a	b	c	d	l
51	4	3	12	4	-3
52	2	1	7	2	1
53	3	2	6	1	2
54	4	-1	3	4	1
55	2	1	3	2	2
56	3	2	1	5	1
57	2	1	2	5	-3
58	3	3	5	2	2
59	5	-2	2	3	1
60	6	-6	5	3	3

Задача 2.2-6. Пряма проходить через точку $M(a, b)$ і відтинає трикутник площею S . За даними табл. 2.2-6 знайти:

- рівняння прямої (дослідити окремі випадки);
- відстань від початку координат до прямої;
- відстань між точками перетину даної прямої з осями координат;
- рівняння прямої, яка проходить через початок координат перпендикулярно до шуканої.

Таблиця 2.2-6

Номер варіанта	a	b	S
61	-3	-2	1,5
62	3	2	6
63	1	4	2
64	2	3	4
65	-2	3	1,5
66	-3	2	6

67	- 1	- 4	2
68	1	- 5	1,25
69	3	5	16/3
70	- 1	4	1

Задача 2.2-7. Дано дві точки $A(a, b)$ і $B(c, d)$. За даними табл. 2.2-7 знайти:
а) точку перетину прямої AB з віссю Ox ;
б) точку C на осі Ox , таку що площа трикутника ABC дорівнює S ;
в) відстань від точки C до прямої AB ;
г) рівняння висоти CD трикутника ABC ;
д) кут ACB .

Таблиця 2.2-7

Номер варіанта	a	b	c	d	S
71	1	2	4	4	5
72	1	3	4	7	12,5
73	0	3	3	7	12,5
74	- 2	- 1	1	3	12,5
Номер варіанта	a	b	c	d	S
75	- 3	- 1	0	3	12,5
76	5	- 1	7	3	2
77	6	1	8	5	2
78	1	1	2	4	1,5
79	0	- 2	1	1	1,5
80	2	1	3	5	8,5

Задача 2.2-8. Дано точки $P(a, b)$; $Q(c, d)$; $R(l, f)$ — середини сторін трикутника. За даними табл. 2.2-8 знайти:
а) координати вершин трикутника;
б) точку перетину медіан трикутника;
в) площу трикутника;
г) відстань PD (від точки P до середньої лінії QR);
д) точку перетину висот трикутника.

Таблиця 2.2-8

Номер варіанта	a	b	c	d	l	f
81	3	- 2	1	6	- 4	2
82	5	0	3	8	- 2	4
83	4	- 1	2	7	- 3	3
84	2	- 2	0	6	- 5	2

85	3	-2	1	6	-4	2
86	0	-2	-2	6	-7	2
87	4	0	2	8	-3	4
88	6	1	4	9	-1	5
89	1	-1	-1	5	-6	1
90	1	2	5	1	3	-2

Задача 2.2-9. Дано дві вершини $A(2; -3)$ і $B(5; 1)$ трикутника ABC , рівняння сторони BC : $ax + by + c = 0$ і медіану AM : $mx + ny + p = 0$. За даними табл. 2.2-9 знайти:

- точку перетину медіан;
- тангенс кута CBA ;
- рівняння сторони AC ;
- рівняння висоти CD , опущеної з вершини C на сторону AB ;
- довжину висоти CD ;
- площу трикутника ABC .

Таблиця 2.2-9

Номер варіанта	a	b	c	m	n	p
91	1	2	-7	5	-1	-13
92	1	-1	-4	6	-1	-15
93	1	4	-9	5	1	-7
94	1	-5	0	3	2	0
95	1	-2	-3	2	1	-1
96	1	3	-8	1	-2	-8
97	1	2	-7	3	-5	-21
98	3	1	-16	1	-4	-14
99	1	1	-6	2	-5	-19
100	2	3	-13	1	-3	-11

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1990. – 326 с.; 1993. – 344 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: В 3 ч. – К.: Вища шк., 1990 – 1992. – Ч.1. – 363 с.; Ч.2. – 366 с.; Ч.3. – 359 с.
3. Завало С.Т. Рівняння і нерівності: – К.: Радянська школа, 1973. – 383 с.
4. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Курс вищої математики. - К., ВІТІ НТУУ «КПІ», 2004. - книга 1. - 317 с.; книга 2. - 315 с.
5. Шкіль М.І. Математичний аналіз, Ч.1. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1978. – 382 с.
6. Зайцев Є.П. Вища математика. – Алерта, 2018. - 608 с

ЗМІСТ

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ І ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Визначники та їх властивості.	4
1.1. Основні властивості визначників.	9
1.2. Побудова визначників другого і третього порядку. Означення визначника n -го порядку.	11
1.3 Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.	13
§ 2. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера.	15
2.1. Формули Крамера.	16
2.2. Дослідження системи лінійних рівнянь.	18
§ 3. Матриці і дії над ними. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.	22
3.1. Матриці і дії над ними. Обернена матриця.	22
3.2. Розв'язування сумісних систем n лінійних рівнянь з n невідомими матричним методом.	29
3.3. Ранг матриць.	31
3.4. Дослідження сумісності системи лінійних рівнянь.	34
3.5. Однорідна система лінійних рівнянь.	36
§ 4. Метод Гаусса і Жордана-Гаусса. Розв'язування системи лінійних рівнянь з багатьма невідомими.	39
§ 5. Вектори і лінійні дії над ними. Прямокутна система координат.	50
5.1. Прямокутна система координат на площині і в просторі.	50
5.2. Полярна система координат на площині.	52
5.3. Вектори. Лінійні дії над векторами. Колінеарні та компланарні вектори.	54
5.4. Проекція вектора на вісь. Проекція вектора на вектор.	64
5.5. Лінійні операції над векторами в координатній формі в базисі.	68
§ 6. Скалярний добуток векторів, Його основні властивості.	72
6.1. Властивості скалярного добутку.	72
6.2. Скалярний добуток векторів заданих координатами.	73
6.3. Поділ відрізка в заданому відношенні.	77
§ 7. Векторний добуток векторів.	78
7.1. Права і ліва в'язка векторів.	78
7.2. Векторний добуток векторів.	78
7.3. Застосування векторного добутку.	83
§ 8. Мішаний добуток векторів.	85
8.1. Умова компланарності трьох векторів.	87

§ 9. Лінійні перетворення лінійного простору. Власні числа і власні вектори лінійного простору.....	88
9.1. Лінійні перетворення лінійного простору.....	90
9.2. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення.....	93
§10. Квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до канонічного виду.....	95

Розділ 2. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

§ 1. Рівняння прямої на площині.....	104
1.1. Рівняння прямої, що проходить через точку M_0 в заданому напрямі..	104
1.2. Параметричні рівняння прямої.....	105
1.3. Рівняння прямої, що проходять через дві задані точки.....	105
1.4. Загальне рівняння прямої.....	106
1.5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.....	108
§ 2. Кут між двома прямими. Взаємне розміщення двох прямих. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.....	109
2.1. Перетин двох прямих.....	109
2.2. Кут між прямими.....	110
2.3. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.....	112
2.4. Відстань та відхилення від точки до прямої.....	121
§ 3. Площина.....	124
3.1. Загальне рівняння площини.....	124
3.2. Кут між двома площинами. Умови їх паралельності та перпендикулярності.....	126
3.3. Відстань та відхилення від точки до площини.....	127
3.4. Взаємне розміщення трьох площин.....	129
§ 4. Пряма в просторі.....	131
4.1. Канонічні і параметричні рівняння прямої лінії в просторі.....	131
4.2. Кут між прямими.....	132
4.3. Загальні рівняння прямої.....	133
§ 5. Взаємне розміщення прямої і площини.....	136
ЗАВДАННЯ	
Розділ 1. Лінійна алгебра.....	141
Розділ 2. Векторна алгебра і аналітична геометрія.....	151
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	161

