ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ПОДІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ЕНЕРГЕТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

до практичних занять

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня

вищої освіти

за спеціальністю G3 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Кам'янець-Подільський
2025 рік

УДК 517.3:631.3 (07)
С-30

Укладачі:
СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
МАРЧУК Наталія Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Закладу вищої освіти
«Подільський державний університет»
протокол № 4 від 28.05.2025 р

Рецензенти:
ГУДИМА Уляна Василівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

ГАРАСИМЧУК Ігор Дмитрович
завідувач кафедри електротехніки, електромеханіки і електротехнологій, кандидат технічних наук, доцент ЗВО «ПДУ».

Методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G3 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / І.В. СЕМЕНИШИНА, Н.А. МАРЧУК. Кам'янець-Подільський: ЗВО «ПДУ», 202. - 120с.

У методичних рекомендаціях наведено по 30 варіантів завдань для контрольних робіт, зразки їх розв'язання та основні формули по темах «Визначники. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині», «Криві 2-го порядку. Аналітична геометрія в просторі», «Границя функції однієї змінної», «Похідна функції однієї змінної», «Застосування похідної».

Методичні рекомендації можуть бути використані здобувачами освіти як денної так і заочної форм навчання при підготовці та проведенні контрольних робіт з вищої математики.

Зміст

Вступ……..4

Тема 1. «Визначники. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса»

Основні формули……..7

Задачі для самостійного розв'язання ……8

Зразок розв'язання задачі 1……11

Тема 2. Елементи векторної алгебри

Основні формули……17

Задачі для самостійного розв'язання……....18

Зразок розв'язання задачі 2……....20

Тема 3. Аналітична геометрія на площині

Основні формули ……...42

Задачі для розв'язання….....44

Зразок розв'язання задачі 3……..46

Тема 4. Криві 2-го порядку. Аналітична геометрія в просторі

Основні формули……50

Контрольна робота ……54

Тема 5. Границя функції однієї змінної

Основні формули……...73.

Задачі для розв'язання…. 74

Зразок розв'язання задачі 5…….78

Тема 6. Похідна функції однієї змінної.

Основні формули ……...83

Задачі для розв’язання…….....85

Зразок розв’язання задачі 6……...93

Тема 7. Застосування похідної

Основні формули……94

Контрольна робота…….96

Зразки розв’язання задач……..111

Список використаних джерел…….....118

Вступ

Математика це одна з найдавніших наук, яка формувалася під впливом видатних мислителів, таких як Декарт, Паскаль, Ферма, Ньютон, Лейбніц, Ейлер, Лобачевський, Колмогоров та інші. Сьогодні вона активно проникає в усі сфери людської діяльності, точно відображаючи універсальні закони навколишнього світу.

Методичні рекомендації розроблені колективом авторів кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін Закладу вищої освіти «Подільський державний університет» на основі багаторічного досвіду викладання навчальної дисципліни «Вища математика» та орієнтований для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності G3 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка.

Мета даних рекомендацій є забезпечити ґрунтовне засвоєння практичного курсу з навчальної дисципліни «Вища математика», сприяти формуванню навичок у застосуванні методів вищої математики, допомогти здобувачам вищої освіти при самостійному розв’язанні задач.

Відомо, що новий навчальний матеріал засвоюється здобувачами вищої освіти значно легше, якщо він супроводжується достатньо великою кількістю прикладів, які

його ілюструють. У методичних рекомендаціях наведено по 30 варіантів завдань для контрольних робіт, зразки їх розв'язання та основні формули по темах «Визначники. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині», «Криві 2-го порядку. Аналітична геометрія в просторі», «Границя функції однієї змінної», «Похідна функції однієї змінної», «Застосування похідної».

Розв'язання значної кількості типових задач з кожного розділу сприяє глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу. Автори приділили особливу увагу детальному поясненню основних математичних понять і методів, розв'язуванню задач, що забезпечує системне формування математичних компетентностей.

Оволодіння представленим матеріалом дає змогу майбутньому фахівцеві не лише здобути необхідні базові навички, а й, осмислюючи їх у контексті професійної діяльності, сформувати індивідуальний підхід до вирішення прикладних завдань.

Тема 1. Визначники. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса.

Основні формули

1) $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$ визначник 2-го порядку;

2) $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} +$

$+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$

визначник 3-го порядку;

3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

а) $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$ формули Крамера для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими;

б) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$

$X = A^{-1} \cdot B$ матричне рівняння системи (3),

де $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ обернена матриця;

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ алгебраїчні доповнення.

Задачі для розв'язання

Задача 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

1) методом Крамера;

2) матричним методом;

3) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = x_3 = -2. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$ **1.28.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ **1.30.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Зразок розв'язання задачі 1.

Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Метод Крамера. Розв'язання:

Обчислюємо головний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot (-8) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-8) \cdot 2 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) = -24 - 12 + 10 + 48 - 2 + 30 = 50.$$

Обчислюємо допоміжні визначники, замінивши відповідний стовпець головного визначника стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -12 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ -12 & -8 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot (-8) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-12) \cdot 1 -$$

$$-4 \cdot (-8) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-12) \cdot (-2)$$

$$= -48 - 16 - 24 + 64 - 4 - 72 = -100;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -12 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & -12 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot (-12) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-12) \cdot 2$$

$$-4 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 2 = -36 + 12 + 40 + 72 - 8 - 30 = 50;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & -12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot (-8) \cdot 4 + (-2) \cdot (-12) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 -$$

$$-3 \cdot (-8) \cdot 2 - 1 \cdot (-12) \cdot 1 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)$$

$$= -32 + 72 + 10 + 48 + 12 + 40 = 150.$$

Підставляємо знайдені значення у формули Крамера і знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-100}{50} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{50}{50} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{150}{50} = 3.$$

Відповідь: **(-2; 1; 3).**

Матричний метод. Розв'язання:

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Вводимо допоміжні позначення:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 5 & -8 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2\\ -12\\ 4\end{pmatrix},$$ де A матриця

коефіцієнтів при невідомих, B матриця-стовпець вільних членів, X матриця-стовпець невідомих.

Тоді дана система перетвориться на матричне рівняння $AX=B$, розв'язок якого має вигляд $X=A^{-1}B$, де A^{-1} матриця, обернена до матриці $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ та обчислюється за формулою $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$;

ΔA головний визначник системи, причому $\Delta A\neq 0$ (тоді система має єдиний розв'язок); A_{ij} алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A, які одержують із головного визначника за допомогою викреслювання відповідного рядка і стовпця.

Головний визначник системи було знайдено методом Крамера, він дорівнює $\Delta A=50\neq 0.$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -24 - 2 = -26;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 3 - 3 \cdot 2) = -(15 - 6) = -9;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-8) = 5 + 24 = 29;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -(-6 - 2) = 8;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) = -(1 + 6) = -7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - (-8) \cdot 2 = -4 + 16 = 12;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 5 \cdot 2) = -(2 - 10) = 8;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) - 5 \cdot (-2) = -8 + 10 = 2.$$

Записуємо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ -9 & -3 & 8 \\ 29 & -7 & 2 \end{pmatrix}$,

множимо обернену матрицю на матрицю B та одержуємо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ -9 & -3 & 8 \\ 29 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -26\cdot 2 + 8\cdot(-12) + 12\cdot 4 \\ -9\cdot 2 + (-3)\cdot(-12) + 8\cdot 4 \\ 29\cdot 2 + (-7)\cdot(-12) + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -52 - 96 + 48 \\ -18 + 36 + 32 \\ 58 + 84 + 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Звідки x_1 =-2, x_2 = 1, x_3 = 3 розв'язок системи.

Відповідь: **(-2; 1; 3).**

Метод Гаусса. Розвязання:

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Метод Гаусса полягає у зведенні системи до трикутного вигляду. Складемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутного вигляду (*p*- це рядок):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 & -12 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 21 & 64 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$1p \cdot (-5) + 2p \Rightarrow 2p \quad 2p \cdot (-3) + 3p \Rightarrow 2p \qquad 2p(-2) + 3p$

$1p \cdot (-3) + 3p \Rightarrow 3p \quad 2p \Rightarrow 3p$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 21 & 64 \\ 0 & 0 & -50 & -150 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 21 & 64 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$3p : (-50) \Rightarrow 3p$

(Під кожною матрицею записані дії, які виконуються над елементами її відповідних рядків).

Маємо систему рівнянь, яка відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + 21x_3 = 64, \\ x_3 = 3, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - 2x_3, \\ x_2 = 64 - 21x_3, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Підставляючи в друге рівняння системи $x_3 = 3$, знаходимо $x_2 = 64 - 21 \cdot 3 = 64 - 63 = 1.$ Підставляючи в третє рівняння системи $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, знаходимо:

$x_1 = 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2 + 2 - 6 = -2.$

Отже, x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3 єдиний розв'язок системи.

Відповідь: **(- 2; 1; 3).**

Тема 2. Елементи векторної алгебри

Основні формули

1) $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ довільні точки простору, тоді $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ вектор AB;

2) $\vec{a} = \{x, y, z\} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$;

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ модуль вектора $\vec{a}$,

$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$ напрямні косинуси вектора $\vec{a}$;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ скалярний добуток векторів, $\varphi -$ кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$; звідки $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

4) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

6) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

7) $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\},\ \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\},\ \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\},$

тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ координатні

форми скалярного, векторного і мішаного добутку, відповідно;

8) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|;\ V_{\text{пір.}ABCD} = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}.$

Задача для розв'язання

Задача 2. Дано координати вершин піраміди ABCD. Знайти:

1) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їх модулі;
2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;
4) площу грані *ABC*;
5) об'єм піраміди *ABCD*.

2.1. *A* (2; -3; 1), *B* (6; 1; -1), *C* (7; 10; -14), *D* (2; -1; 2).

2.2. *A* (5; -1; -4), *B* (9; 3; -6), *C* (7; 10; -14), *D* (5; 1; -3).

2.3. *A* (1; -4; 0), *B* (5; 0; -2), *C* (3; 7; -10), *D* (1; -2; 1).

2.4. *A* (-3; -6; 2), *B* (1; -2; 0), *C* (-1; 5; -8), *D* (-3; -4; 3).

2.5. *A* (-1; 1; -5), *B* (3; 5; -7), *C* (1; 12; -15), *D* (-1; 3; -4).

2.6. *A* (-4; 2; -1), *B* (0; 6; -3), *C* (-2; 13; -11), *D* (-4; 4; 0).

2.7. *A* (0; 4; 3), *B* (4; 8; 1), *C* (2; 15; -7), *D* (0; 6; 4).

2.8. *A* (-2; 0; -2), *B* (2; 4; -4), *C* (0; 11; -12), *D* (-2; 2; -1).

2.9. *A* (3; 3; -3), *B* (7; 7; -5), *C* (5; 14; -13), *D* (3; 5; -2).

2.10. *A* (4; -2; 5), *B* (8; 2; 3), *C* (6; 9; -5), *D* (4; 0; 6).

2.11. *A* (-5; 0; 1), *B* (-4; -2; 3), *C* (6; 2; 11), *D* (3; 4; 9).

2.12. *A* (1; -4; 0), *B* (2; -6; 2), *C* (12; -2; 10), *D* (9; 0; 8).

2.13. *A* (-1; -2; -8), *B* (0; -4; -6), *C* (10; 0; 2), *D* (7; 2; 0).

2.14. *A* (0; 2; -10), *B* (1; 0; -8), *C* (11; 4; 0), *D* (8; 6; -2).

2.15. *A* (3; 1; -2), *B* (4; -1; 0), *C* (14; 3; 8), *D* (11; 5; 6).

2.16. *A* (-8; 3; -1), *B* (-7; 1; 1), *C* (3; 5; 9), *D* (0; 7; 7).

2.17. *A* (2; -1; -4), *B* (3; -3; -2), *C* (13; 1; 6), *D* (10; 3; 4).

2.18. *A* (-4; 5; -5), *B* (-3; 3; -3), *C* (7; 7; 5), *D* (4; 9; 3).

2.19. *A* (-2; -3; 2), *B* (-1; -5; 4), *C* (9; -1; 12), *D* (6; 1; 10).

2.20. *A* (-3; 4; -3), *B* (-2; 2; -1), *C* (8; 6; 7), *D* (5; 8; 5).

2.21. *A* (2; -3; 1), *B* (6; -11; 9), *C* (4; -4; -1), *D* (2; -1; 2).

2.22. *A* (2; -3; 1), *B* (10; 1; -7), *C* (4; -5; 2), *D* (2; -1; 2).

2.23. *A* (2; -3; 1), *B* (0; -2; 3), *C* (10; 1; 9), *D* (2; -1; 2).

2.24. *A* (2; -3; 1), *B* (4; 1; -3), *C* (3; -1; 3), *D* (2; -1; 2).

2.25. *A* (2; -3; 1), *B* (-2; 1; 3), *C* (4; -2; 3), *D* (2; -1; 2).

2.26. *A* (2; -3; 1), *B* (4; -1; 3), *C* (3; -4; 2), *D* (2; -1; 2).

2.27. *A* (2; -3; 1), *B* (5; 0; -2), *C* (0; -1; -1), *D* (2; -1; 2).

2.28. *A* (2; -3; 1), *B* (3; -4; 2), *C* (-1; -6; 4), *D* (2; -1; 2).

2.29. *A* (2; -3; 1), *B* (6; -7; 5), *C* (3; -2; 2), *D* (2; -1; 2).

2.30. *A* (2; -3; 1), *B* (-3; 2; 6), *C* (0; -1; -1), *D* (2; -1; 2).

Зразок розв'язання задачі 2.

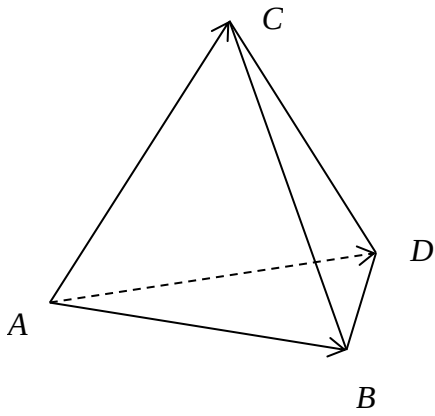
Дано координати вершин піраміди A (2; 1; 0), B (3; -1; 2), C (13; 3; 10), D (0; 1; 4). Знайти:

1. вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їх модулі;
2. кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3. проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;
4. площу грані ABC;
5. об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання: 1) Для відшукання координат вектора треба від координат його кінця відняти відповідні координати початку:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-2;\ -1-1;\ 2-0\} = \{1;\ -2;\ 2\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{13-2;\ 3-1;\ 10-0\} = \{11;\ 2;\ 10\}.$$



Знайдемо модулі цих векторів за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\left|A\vec{B}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\left|A\vec{C}\right| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{121+4+100} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Кут між векторами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ та $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

шукається за допомогою формули $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$,

де $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ скалярний добуток векторів.

В нашому прикладі:

$$A\vec{B} \cdot A\vec{C} = \{1; -2; 2\} \cdot \{11; 2; 10\} = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10$$
$$= 11 - 4 + 20 = 27.$$

Тоді $\cos\alpha = \dfrac{A\vec{B} \cdot A\vec{C}}{\left|A\vec{B}\right| \cdot \left|A\vec{C}\right|} = \dfrac{27}{3 \cdot 15} = \dfrac{27}{45} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

$$\alpha = arccos\ 0{,}6.$$

3) Проекція вектора AB на вектор $A\vec{C}$ шукається за формулою:

$$np_{A\vec{C}} A\vec{B} = \frac{A\vec{B} \cdot A\vec{C}}{|A\vec{C}|}.$$

Підставляючи знайдені вище значення в цю формулу, одержимо:

$$np_{\vec{AC}}\vec{AB} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}.$$

4) Площа трикутника ABC шукається за формулою:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|,$$

де $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 10 \end{vmatrix}$

$+\vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot (-2 \cdot 10 - 2 \cdot 2) - j \cdot (1 \cdot 10 - 11 \cdot 2) +$

$+\vec{k} \cdot \big(1 \cdot 2 - 11 \cdot (-2)\big) = \vec{\imath}(-20 - 4) - \vec{\jmath}(10 - 22) +$

$\vec{k}(2 + 22) = -24\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 24\vec{k} = \{-24; 12; 24\}.$

Знайдемо площу трикутника як половину модуля знайденого векторного добутку:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} =$$

$6\sqrt{9} = 18.$

Об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює шостій частині мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$:

$$\vec{AD} = \{x_D - x_A;\ y_D - y_A;\ z_D - z_A\} = \{0 - 2; 1 - 1; 4 - 0\} =$$

$\{-2; 0; 4\}.$

Тоді об'єм піраміди:

$$V_{ABCD} = \pm\frac{1}{6} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} =$$

$\pm\frac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 4-2\cdot 10\cdot(-2)+2\cdot 11\cdot 0-(-2)\cdot 2\cdot 2-0\cdot 10\cdot 1--4\cdot 11\cdot(-2))=\pm\frac{1}{6}(8+40+0+8-0+88)=\frac{1}{6}\cdot 144=24.$

Відповідь: **1) 3;15; 2) 0,6; 3) 1,8; 4) 18 кв. од. 5) 24 куб. од.**

Контрольна робота

Варіант 1

1.Побудувати вектор $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=60°$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо A(1, -2, 3), B(0, -1, 2), C(3, -4, 5).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q},|\vec{p}|=1,$

$|\vec{q}|=2,\qquad \varphi=\frac{\pi}{6}-$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (4; -1; 2), *C* (-2; 5; 2), *D* (-2; 1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об’єм піраміди *ABCD*.

Варіант 2

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\quad \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-9, -3, -6).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q},\quad |\vec{p}| = 4,$

$|\vec{q}| = 1,\qquad \varphi = \frac{\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(5; -1; -4), *B* (9;3;-6), *C* (7; 10; -14), *D* (5; 1; -3).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 3

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\quad \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},\quad |\vec{p}| = \frac{1}{5},$

$|\vec{q}| = 1,\qquad \varphi = \frac{\pi}{2} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (1; -4; 0), *B* (5; 0; -2), *C* (3; 7; -10), *D* (1; -2; 1).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 4

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 120°$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо

A(-1, 2, -3), B(3, 4, -6), C(1, 1, -1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-3; -6; 2), *B* (1; -2; 0), *C* (-1; 5; -8), *D* (-3; -4; 3).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 5

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 60°$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо

A(-4,-2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 2,$ $|\vec{q}| = 3,\qquad \varphi = \frac{3\pi}{4}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-1; 1; -5), *B* (3; 5; -7), *C* (1; 12; -15), *D* (-1; 3; -4).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 6

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \ \varphi = 120°$ – кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо A(5, 3, -1), B(5, 2, 0), C(6, 4, -1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 2,$ $|\vec{q}| = 3,\qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (-4; 2; -1), *B* (0; 6; -3), *C* (-2; 13; -11), *D* (-4; 4; 0).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 7

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), C(2, 3, 0).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 3,$

$|\vec{q}| = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (0; 4; 3), *B* (4; 8; 1), *C* (2; 15; -7), *D* (0; 6; 4).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 8

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 2,\ \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(2, -4, 6), B(0, -2, 4), C(6, -8, 10).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 7,$

$|\vec{q}| = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-2; 0; -2), *B* (2; 4; -4), *C* (0; 11; -12), *D* (-2; 2; -1).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 9

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, 1, -2), B(3, 1, 2), C(4, 1, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$,

$|\vec{q}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди: *A* (3; 3; -3),

B (7; 7; -5), *C* (5; 14; -13), *D* (3; 5; -2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 10

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(3, 3, -1), B(1, 5, -2), C(4, 1, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 7,$

$|\vec{q}| = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (4; -2; 5), *B* (8; 2; 3), *C* (6; 9; -5), *D* (4; 0; 6).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 11

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + 4\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 1, \quad \varphi = 60°$ – кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(2, 1, -1), B(6, -1, -4), C(4, 2, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 10,$

$|\vec{q}| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (-5; 0; 1), *B* (-4; -2; 3), *C* (6; 2; 11), *D* (3; 4; 9).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 12

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 4\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 4,\quad \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(-1, -2, 1), B(-4, -2, 5), C(-8, -2, 2).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 5,$

$|\vec{q}| = 4,\qquad \varphi = \frac{\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (1; -4; 0), *B* (2; -6; 2), *C* (12; -2; 10), *D* (9; 0; 8).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 13

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 2,\quad \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(6, 2, -3), B(6, 3, -2), C(7, 3, -3).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 6,$

$|\vec{q}| = 7,\qquad \varphi = \frac{\pi}{3} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-1; -2; -8), *B* (0; -4; -6), *C* (10; 0; 2), *D* (7; 2; 0).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 14

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 2,\quad \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, 0, 4), B(-3, -6, 1), C(-5, -10, -1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},\quad |\vec{p}| = 3,$

$|\vec{q}| = 4,\qquad \varphi = \frac{\pi}{3} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (0; 2; -10), *B* (1; 0; -8), *C* (11; 4; 0), *D* (8; 6; -2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 15

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 2, \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(2, -8, -1), B(4, -6, 0), C(-2, -5, -1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q},\ |\vec{p}| = 2,$

$|\vec{q}| = 3, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (3; 1; -2), *B* (4; -1; 0), *C* (14; 3; 8), *D* (11; 5; 6).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 16

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4, \quad \varphi = 120°$ – кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(3, -6, 9), B(0, -3, 6), C(9, -12, 15).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q},\ |\vec{p}| = 4,$

$|\vec{q}| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (-8; 3; -1), *B* (-7; 1; 1), *C* (3; 5; 9), *D* (0; 7; 7).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 17

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\quad \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, 2, -4), B(8, 2, 2), C(6, 2, 4).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - \overrightarrow{3q},\ \ |\vec{p}| = 1,$

$|\vec{q}| = 2,\qquad \varphi = \frac{\pi}{3} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\overrightarrow{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(2; -1; -4), *B* (3; -3; -2), *C* (13; 1; 6), *D* (10; 3; 4).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 18

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 2,\quad \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, 1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q},\ \ |\vec{p}| = \frac{1}{2},$

$|\vec{q}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-4; 5; -5), *B* (-3; 3; -3), *C* (7; 7; 5), *D* (4; 9; 3)

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 19

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3, \ |\vec{b}| = 4, \quad \varphi = 60°$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо

A(-4, 3, 0), B(0, 1, 3), C(-2, 4, -2).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, \ \ |\vec{p}| = 3,$

$|\vec{q}| = 4, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-2; -3; 2),*B* (-1; -5; 4), *C* (9; -1; 12), *D* (6; 1; 10).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 20

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 4, \ |\vec{b}| = 3, \varphi = 120°$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо

A(1, -1, 0), B(-2, -1, 4), C(8, -1, -1).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 4,$

$|\vec{q}| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(-3; 4; -3), *B* (-2; 2; -1), *C* (8; 6; 7), *D* (5; 8; 5).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 21

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 3, \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(7, 0, 2), B(7, 1, 3), C(8, -1, 2).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},\ |\vec{p}| = 8,$

$|\vec{q}| = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (6; -11; 9), *C* (4; -4; -1), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 22

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(2, 3, 2), B(-1, -3, -1), C(-3, -7, -3).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q},\ \vec{b} = \vec{q} - \vec{p}, |\vec{p}| = 2{,}5;$

$|\vec{q}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(2; -3; 1), *B* (10; 1; -7), *C* (4; -5; 2), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 23

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 3, \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(2, 2, 7), B(0, 0, 6), C(-2, 5, 7).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 3,$

$|\vec{q}| = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A(2; -3; 1), *B* (0; -2; 3), *C* (10; 1; 9), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 24

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 1,\quad \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(-1, 2, -3), B(0, 1, -2), C(-3, 4, -5).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 3,$

$|\vec{q}| = 5,\qquad \varphi = \frac{2\pi}{3} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (4; 1; -3), *C* (3; -1; 3), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 25

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 1,\quad \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, 3, -6), B(9, 3, 6), C(12, 3, 3).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q},\ \ |\vec{p}| = 7,$

$|\vec{q}| = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (-2; 1; 3), *C* (4; -2; 3), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 26

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 3,\ \ \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, -3).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q},\ \ |\vec{p}| = 5,$

$|\vec{q}| = 3, \qquad \varphi = \frac{5\pi}{6} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (4; -1; 3), *C* (3; -4; 2), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 27

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{5}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2,\quad \varphi = 60° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(-2, 1, 1), B(2, 3, -2), C(0, 0, 3).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q},\ |\vec{p}| = 2,$

$|\vec{q}| = 3,\qquad \varphi = \frac{\pi}{4} -$ кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (5; 0; -2), *C* (0; -1; -1), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 28

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1, \varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(1, 4, -1), B(-2, 4, -5), C(8, 4, 0).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q},\ \ |\vec{p}| = \frac{1}{2},$

$|\vec{q}| = 4, \qquad \varphi = \frac{5\pi}{6}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\overrightarrow{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (3; -4; 2), *C* (-1; -6; 4), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 29

1.Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ та обчислити його модуль,

якщо $|\vec{a}| = 3, \ |\vec{b}| = 2, \varphi = 60°$ – кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$, якщо

A(0, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 2, 0).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} - \overrightarrow{2q}, \ |\vec{p}| = 2,$

$|\vec{q}| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\overrightarrow{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (6; -7; 5), *C* (3; -2; 2), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Варіант 30

1.Побудувати вектор $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2, \ |\vec{b}| = 3, \ \varphi = 120°$ – кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо

A(-4, 0, 4), B(-1, 6, 7), C(1, 10, 9).

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

4.Дано координати вершин піраміди:

A (2; -3; 1), *B* (-3; 2; 6), *C* (0; -1; -1), *D* (2; -1; 2).

Знайти площу грані *ABC* та об'єм піраміди *ABCD*.

Зразок розв'язання

1.Побудувати вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ та обчислити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 120° -$ кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання: *1-й спосіб*. $|\vec{c}|^2 = \vec{c}^2 = \left(\frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2 =$

$= \frac{9}{4}\vec{a}^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = \frac{9}{4}\vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = \frac{9}{4} \cdot |\vec{a}|^2 -$

$-6 \cdot |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi + 4 \cdot |\vec{b}|^2 = \frac{9}{4} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120° +$

$+4 \cdot 3^2 = 9 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 36 = 9 + 18 + 36 = 63,$

звідки $|\vec{c}| = \sqrt{63} \approx 7{,}94$.

2.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 8\vec{q},\ \vec{b} = 5\vec{p} - 3\vec{q},$

$|\vec{p}| = 3, \qquad |\vec{q}| = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

Розв'язання: Знайдемо спочатку векторний добуток векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$, а тоді - його модуль. Одержимо:

$\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{p} + 8\vec{q}) \times (5\vec{p} - 3\vec{q}) = 2\vec{p} \times 5\vec{p} - 2\vec{p} \times 3\vec{q} +$

$+8\vec{q} \times 5\vec{p} - 8\vec{q} \times 3\vec{q} = 10\vec{p} \times \vec{p} - 6\vec{p} \times \vec{q} + 40\vec{q} \times \vec{p} -$

$24\vec{q} \times \vec{q}$. Враховуючи властивості векторного добутку одержимо: $\vec{p} \times \vec{p} = 0,\ \vec{q} \times \vec{q} = 0,\ \vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$.

Тому

$\vec{a} \times \vec{b} = 10 \cdot 0 + 6\vec{q} \times \vec{p} + 40\vec{q} \times \vec{p} + 24 \cdot 0 = 46\vec{q} \times \vec{p}.$

Тоді площа паралелограма: $S_{\text{пар.}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 46 \cdot |\vec{q} \times \vec{p}| =$

$$= 46 \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\varphi = 46 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$= 138 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 138\sqrt{3}$(кв. од.).

Тема 3. Аналітична геометрія на площині

Основні формули

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ –точки площини хОу

1) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ відстань між точками A і B або довжина відрізка AB;

2) $x_3 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_3 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ координати точки поділу відрізка AB у відношенні $\lambda = \frac{AB}{BC}$;

3) $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$ координати середини відрізка AB;

4) Площа трикутника: $S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$

$= \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$;

5) Площа многокутника: $S = \pm\frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \cdots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)]$;

6) $y = kx + b$ рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де $\alpha -$ кут між прямою та віссю OX;

7) $y - y_1 = k(x - x_1)$ рівняння прямої, яка проходить через дану точку (x_1, y_1) в даному напрямку k;

8) $Ax + By + C = 0 -$ загальне рівняння прямої

$$(A^2 + B^2 \neq 0)$$

9) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$;

10) $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ кутовий коефіцієнт прямої;

11) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ рівняння прямої у відрізках на осях;

12) $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ відстань від точки (x_0, y_0) до прямої $Ax + By + C = 0$;

13) Якщо φ кут між прямими з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2, то $tg\ \varphi = \pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1\ k_2}$;

14) $k_1 = k_2$ умова паралельності прямих;

15) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ умова перпендикулярності прямих.

Задачі для розв'язання

Задача 3. Дано координати вершин трикутника АВС. Знайти:

1) периметр і площу трикутника АВС;

2) рівняння сторін *AB* і *BC* та їх кутові коефіцієнти;

3) значення кута *B;*

4) рівняння медіани *AE;*

5) рівняння висоти *CD;*

6) довжину висоти *CD.* Зробити рисунок.

3.1. *A* (-8; -3), *B* (4; -12), *C* (8; 10).

3.2. *A* (-5; 7), *B* (7; -2), *C* (11; 20).

3.3. *A* (-12; -1), *B* (0; -10), *C* (4; 12).

3.4. *A* (-10; 9), *B* (2; 0), *C* (6; 22).

3.5. *A* (0; 2), *B* (12; -7), *C* (16; 15).

3.6. *A* (-9; 6), *B* (3; -3), *C* (7; 19).

3.7. *A* (1; 0), *B* (13; -9), *C* (17; 13).

3.8. *A* (-4; 10), *B* (8; 1), *C* (12; 23).

3.9. *A* (2; 5), *B* (14; -4), *C* (18; 18).

3.10. *A* (-1; 4), *B* (11; -5), *C* (15; 17).

3.11. *A* (-2; 7), *B* (10; -2), *C* (8; 12).

3.12. *A* (-6; 8), *B* (6; -1), *C* (4; 13).

3.13. *A* (3; 6), *B* (15; -3), *C* (13; 11).

3.14. *A* (-10; 5), *B* (2; -4), *C* (0; 10).

3.15. *A* (-4; 12), *B* (8; 3), *C* (6; 17).

3.16. *A* (-3; 10), *B* (9; 1), *C* (7; 15).

3.17. *A* (4; 1), *B* (16; -8), *C* (14; 6).

3.18. *A* (-7; 4), *B* (5; -5), *C* (3; 9).

3.19. *A* (0; 3), *B* (12; -6), *C* (10; 8).

3.20. *A* (-5; 9), *B* (7; 0), *C* (5; 14).

3.21. *A* (1; -1), *B* (4; 3), *C* (5; 1).

3.22. *A* (0; -1), *B* (3; 3), *C* (4; 1).

3.23. *A* (1; -2), *B* (4; 2), *C* (5; 0).

3.24. *A* (2; -2), *B* (5; 2), *C* (6; 0).

3.25. *A* (2; 2), *B* (5; 6), *C* (6; 4).

3.26. *A* (-1; 1), *B* (2; 5), *C* (3; 3).

3.27. *A* (4; -2), *B* (7; 2), *C* (8; 0).

3.28. *A* (-2; 1), *B* (1; 5), *C* (2; 3).

3.29. *A* (4; -3), *B* (7; 1), *C* (8; -1).

3.30. *A* (-2; 2), *B* (1; 6), *C* (2; 4).

Зразок розв'язання задачі 3.

Дано координати вершин трикутника A (4;3), B (16;-6), C(20;16)

Знайти: 1) периметр і площу трикутника АВС;

2) рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти;

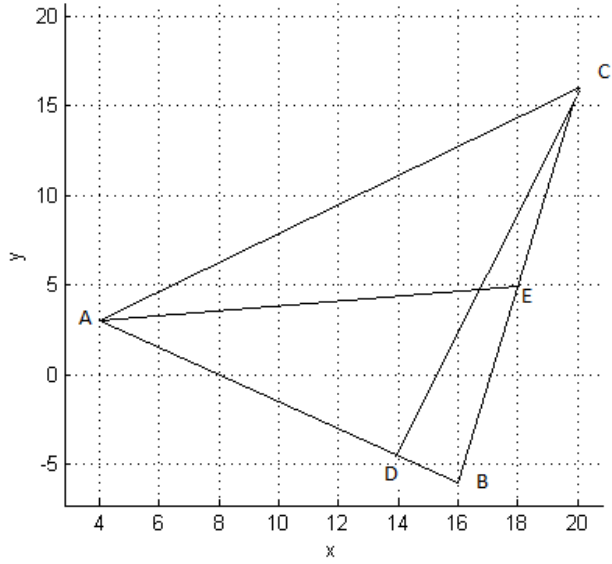
3) значення кута B;

4) рівняння медіани AE;

5) рівняння висоти CD;

6) довжину висоти CD.

Розв'язання: Побудуємо трикутник ABC в системі xOy:



1.Знайдемо периметр трикутника АВС як суму довжин його сторін АВ, АС і ВС. За формулою (1) знайдемо довжини сторін

$$|AB| = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15;$$

$$|AC| = \sqrt{(20-4)^2 + (16-3)^2} = \sqrt{256+169} = \sqrt{425} \approx 20{,}6;$$

$$|BC| = \sqrt{(20-16)^2 + (16+6)^2} = \sqrt{16+484} = \sqrt{500} \approx 22{,}4.$$

Тоді периметр $P_{\Delta ABC} \approx 15 + 20{,}6 + 22{,}4 = 58$.

Площу трикутника шукаємо за формулою (4):

$$S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 16-4 & -6-3 \\ 20-4 & 16-3 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 12 & -9 \\ 16 & 13 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\big(12 \cdot 13 - 16 \cdot (-9)\big) = \frac{1}{2}(156+144) =$$

$$= 300 : 2 = 150 \text{ (кв. од.)}.$$

2.Складемо рівняння прямих *AB* і *BC* у вигляді рівняння прямої,

яка проходить через дві дані точки (x_1; y_1) та (x_2; y_2), тобто, рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Підставимо в це рівняння координати точок *A* і *B* $x_1 = 4$, $x_2 = 16$, $y_1 = 3$, $y_2 = -6$:

$$\frac{x-4}{16-4} = \frac{y-3}{-6-3} \Rightarrow \frac{x-4}{12} = \frac{y-3}{-9} \Rightarrow \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(y-3) = -3(x-4) \Rightarrow 4y - 12 = -3x + 12 \Rightarrow 4y = -3x + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6 \text{ –рівняння прямої } AB;\ k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

Підставляючи в те саме рівняння координати точок *B* і *C*

$x_1 = 16, x_2 = 20, y_1 = -6, y_2 = 16$, одержимо: $\frac{x-16}{20-16} =$

$\frac{y-(-6)}{16-(-6)} \Rightarrow \frac{x-16}{4} = \frac{y+6}{22} \Rightarrow 4(y+6) = 22(x-16) \Rightarrow$

$2(\mathrm{y}+6) = 11(\mathrm{x}-16) \Rightarrow 2\mathrm{y}+12 = 11\mathrm{x}-176 \Rightarrow 2\mathrm{y}$

$= 11\mathrm{x} - 188 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{11}{2}x - \frac{188}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2}x - 94 -$

рівняння прямої BC;$k_{BC} = \frac{11}{2}$.

3.Значення кута B знайдемо із формули: $tgB = \pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$,

де $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}, k_2 = k_{BC} = \frac{11}{2}$.

Підставляємо ці значення у формулу $tgB = \pm\frac{\frac{11}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{11}{2}} =$

$\pm\frac{\frac{11}{2}+\frac{3}{4}}{1-\frac{33}{8}} = \pm\frac{11\cdot4+3\cdot2}{8-33} =$

$= \pm\frac{44+6}{-25} \pm \frac{50}{-25} = 2$, звідки $B = arctg2$.

4.AE медіана, проведена до сторони BC, тому точка E середина

відрізка BC, де B (16; -6), C (20; 16). Знайдемо координати точки E

за формулами $x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}$, де $x_1 = x_B = 16$,

$x_2 = x_C = 20$

тоді $x_E = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18$; $y_1 = y_B = -6$, $y_2 = y_C = 16$, тоді

$y_E = \frac{-6+16}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Отже, E (18; 5) середина сторони BC.

Складаємо рівняння медіани AE, яка проходить через дві дані точки

A (4; 3) та E (18; 5):

$AE: \frac{x-4}{18-4} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow \frac{x-4}{14} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow 2(x-4) = 14(y-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 4 = 7(y-3) \Rightarrow x - 4 = 7y - 21 \Rightarrow x - 4 -$

$7y + 21 = 0 \Rightarrow x - 7y + 17 = 0 -$ рівняння медіани AE.

5.CD висота, проведена до сторони AB, тому $CD \perp AB$, тому $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Знайдемо рівняння висоти CD у вигляді

$y - y_0 = k(x - x_0)$, де $x_0 = x_C = 20$; $y_0 = y_C = 16$,

$$k = k_{CD} = \frac{4}{3}.$$

Одержимо:

$AE: y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20) \Rightarrow 3(y-16) = 4(x-20) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y - 48 = 4x - 80 \Rightarrow 4x - 80 - 3y + 48 = 0 \Rightarrow$

$4x - 3y - 32 = 0$ рівняння висоти CD.

6.Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки

C (20; 16)

до прямої AB, яка має рівняння

$$y = -\frac{3}{4}x + 6 \Rightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

У формулу $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ підставляємо

$A = 3$, $B = 4$, $C = -24$, $x_0 = 20$, $y_0 = 16$:

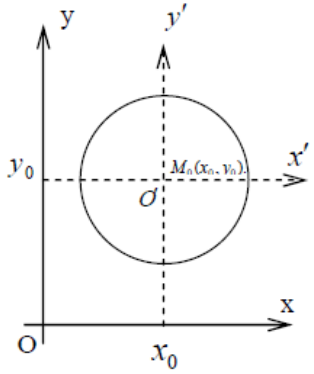
$$|CD| = \frac{|3 \cdot 20 + 4 \cdot 16 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{60 + 64 - 24}{\sqrt{25}} = \frac{100}{5} = 20.$$

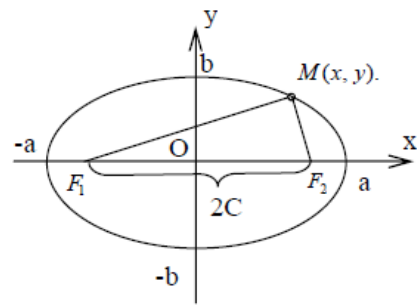
Відповідь: 1) 58; 150; 2) $y = -\frac{3}{4}x + 6, y = \frac{11}{2}x - 94$;

3)$B = arctg2$; 4) $x - 7y + 17 = 0$; 5) $4x - 3y - 32 = 0$; 6) 20.

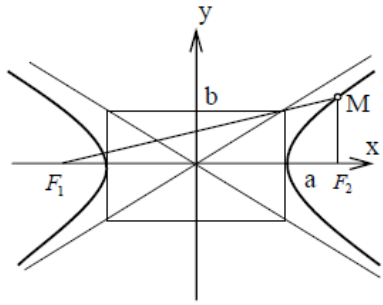
Тема 4. Криві 2-го порядку. Аналітична геометрія в просторі

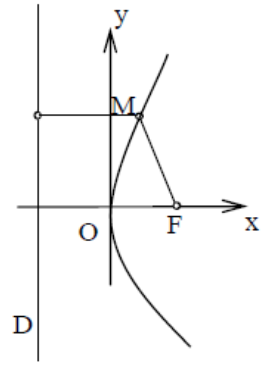
Основні формули





Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ **Еліпс** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$





Гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **Парабола** $y^2=2px$

1.Основні параметри кола центр $C(x_0;y_0)$ та радіус R;

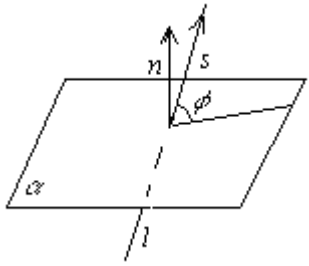
2.Основні параметри еліпса: півосі a,b $(a>b)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ фокуси, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ексцентриситет;

3.Основні параметри гіперболи: півосі a,b; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

4.фокуси, де $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ексцентриситет;

5.Основні параметри параболи: p $(p>0)$; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ фокус;

$x=-\frac{p}{2}$ рівняння директриси;



$\vec{n}=\{A,B,C\}$ нормальний вектор площини;

$\vec{s}=\{l,m,p\}$ напрямний вектор прямої;

φ кут між прямою і площиною;

6. $Ax+By+Cz+D=0$

загальне рівняння площини:

$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0);$$

7. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A, B, C\}$;

8. $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$;

9. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ рівняння площини у відрізках, які відтинає площина на осях координат);

10. Кут φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ визначається із формули:

$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

11. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ умова паралельності площин;

12. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$умова перпендикулярності площин;

13. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ –відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$;

14. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

15. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}$ канонічні рівняння прямої;

16. $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+pt \end{cases}$ параметричні рівняння прямої;

17. $\begin{cases} \mathrm{A}_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ рівняння прямої як лінії перетину двох площин;

18. Кут φ між прямими з напрямними векторами $\vec{s}_1=\{l_1,m_1,p_1\}$ та $\vec{s}_2=\{l_2,m_2,p_2\}$ визначається за допомогою формули:

$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}$;

19. $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$ умова паралельності двох прямих;

20. $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$умова перпендикулярності двох прямих;

21. Кут φ між прямою з напрямним вектором $\vec{s}=\{l,m,p\}$ і площиною з нормальним вектором $\vec{n}=\{A,B,C\}$ визначається із формули

$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}}$;

21. $Al+Bm+Cp=0$ умова паралельності прямої та площини;

22. $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$ умова перпендикулярності прямої та площини.

Контрольна робота

Варіант 1

1.Дано рівняння лінії $y^2 = 4x$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,0,-2), B(2,-1,3), C(0,-3,2).

3.Знайти кут між площинами x - 3y + 5 = 0,

2x – y + 5z – 16 = 0.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Варіант 2

1.Дано рівняння лінії $4x^2 + 9y^2 = 36$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-1,3,4), B(-1,5,0), C(2,6,1).

3.Знайти кут між площинами x - 3y + z - 1 = 0,

x + z – 1 = 0.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

Варіант 3

1.Дано рівняння лінії $4x^2 - 9y^2 = 36$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(4,-2,0), B(1,-1,-5), C(-2,1,-3).

3.Знайти кут між площинами 4x - 5y + 3z - 1 = 0,

x - 4y - z + 9 = 0.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad x - 3y + 7z - 24 = 0.$$

Варіант 4

1.Дано рівняння лінії $x^2=-6y$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A (-8,0,-7), B (-3,2,4), C (-1,4,5).

3.Знайти кут між площинами 3x - y + 2z + 15 = 0,

5x + 9y -3z –1 = 0.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, \quad 2x - y + 4z = 0.$$

Варіант 5

1.Дано рівняння лінії $9x^2 + 4y^2 = 36$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(7,-5,1), B(5,-1,-3), C(3,0,-4).

3.Знайти кут між площинами $-2y - 4z - 17 = 0$,

$9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$$

Варіант 6

1.Дано рівняння лінії $4x^2 - 25y^2 = 100$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-3,5,-2), B(-4,0,3), C(-3,2,5).

3.Знайти кут між площинами $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$,

$$x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 3y - 5z - 9 = 0$$

Варіант 7

1.Дано рівняння лінії $25x^2 + 4y^2 = 100$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,-1,8), B(-4,-3,10), C(-1,-1,7).

3.Знайти кут між площинами $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0.$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad x - 2y + 5z + 17 = 0.$$

Варіант 8

1.Дано рівняння лінії $y^2=-8x$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-2,0,-5), B(2,7,-3), C(1,10,-1).

3.Знайти кут між площинами $6x + 3y + 2z = 0,$

$x + 2y + 6z - 12 = 0.$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}, \quad x - 2y + 4z - 19 = 0.$$

Варіант 9

1.Дано рівняння лінії $16x^2 + 9y^2 = 144$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,9,-4), B(5,7,1), C(3,5,0).

3.Знайти кут між площинами $x + 2y + 2z - 3 = 0$,

$16x + 12y - 15z - 1 = 0.$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x - y + 3z + 23 = 0.$$

Варіант 10

1.Дано рівняння лінії $9x^2 - 25y^2 = 225$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-7,0,3), B(1,-5,-4), C(2,-3,0).

3.Знайти кут між площинами $2x - y + 5z - 16 = 0$,

$$x + 2y + 3z + 8 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, \quad 2x - 3y - 5z - 7 = 0.$$

Варіант 11

1.Дано рівняння лінії $x^2 = -y$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(0,-3,5), B(-7,2,6), C(-3,2,4).

3.Знайти кут між площинами $2x + 2y + z - 1 = 0$,

$x + z - 1 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad 4x + 2y - z - 11 = 0.$$

Варіант 12

1.Дано рівняння лінії $4x^2 + 25y^2 = 100$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(5,-1,2), B(2,-4,3), C(4,-1,3).

3.Знайти кут між площинами $3x + y + z - 4 = 0$,

$y + z + 5 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, \quad 3x - 2y - 4z - 8 = 0.$$

Варіант 13

1.Дано рівняння лінії $x^2 + 4y^2 = 4$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-3,7,2), B(3,5,1), C(4,5,3).

3.Знайти кут між площинами $3x - 2y - 2z - 16 = 0$,

$x + y - 3z - 7 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x + 2y - z - 2 = 0.$$

Варіант 14

1.Дано рівняння лінії $16x^2 - 25y^2 = 400$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(0,-2,8), B(4,3,2), C(1,4,3).

3.Знайти кут між площинами $2x + 2y + z + 9 = 0$,

$$x - y + 3z - 1 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, \quad 5x - y + 4z + 3 = 0.$$

Варіант 15

1.Дано рівняння лінії $4x^2 + y^2 = 4$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,-1,5), B(0,7,8), C(-1,3,8).

3.Знайти кут між площинами $x + 2y + 2z - 3 = 0$,

$$2x - y + 2z + 5 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \quad x + 3y + 5z - 42 = 0.$$

Варіант 16

1.Дано рівняння лінії $x^2 - 4y^2 = 4$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вигляд лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-10,0,9), B(12,4,11), C(8,5,15).

3.Знайти кут між площинами $3x + 2y - 3z - 1 = 0$,

$$x + y + z - 7 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, \quad 7x + y + 4z - 47 = 0.$$

Варіант 17

1.Дано рівняння лінії $x^2 = 10y$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(3,-3,-6), B(1,9,-5), C(6,6,-4).

3.Знайти кут між площинами $x - 3y - 2z - 8 = 0$,

$$x + y - z + 3 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad 2x + 3y + 7z - 52 = 0.$$

Варіант 18

1.Дано рівняння лінії $25x^2 + 16y^2 = 400$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(2,1,7), B(9,0,2), C(9,2,3).

3.Знайти кут між площинами $3x - 2y + 3z + 23 = 0$,

$$y + z + 5 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad 3x + 4y + 7z - 16 = 0.$$

Варіант 19

1.Дано рівняння лінії $y^2 = -x$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат xOy.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-7,1,-4), B(8,11,-3), C(9,9,-1).

3.Знайти кут між площинами $x + y + 3z - 7 = 0$,

$y + z - 1 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x - 5y + 4z + 24 = 0.$$

Варіант 20

1.Дано рівняння лінії $25x^2 + 9y^2 = 225$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,0,-6), B(-7,2,1), C(-9,6,1).

3.Знайти кут між площинами $x - 2y + 2z + 17 = 0$,

$$x - 2y - 1 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини :

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, \quad x - 2y - 3z + 18 = 0.$$

Варіант 21

1.Дано рівняння лінії $x^2 - 9y^2 = 9$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-3,1,0), B(6,3,3), C(9,4,-2).

3.Знайти кут між площинами $x + 2y - 1 = 0$,

$x + y + 6 = 0.$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad x + 7y + 3z + 11 = 0.$$

Варіант 22

1.Дано рівняння лінії $9x^2 + y^2 = 9$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і *побудувати* лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-4,-2,5), B(3,-3,-7), C(9,3,-7).

3.Знайти кут між площинами $2x - z + 5 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, \quad 3x + 7y - 5z - 11 = 0.$$

Варіант 23

1.Дано рівняння лінії $9x^2 + 25y^2 = 225$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(0,-8,10), B(-5,5,7), C(-8,0,4).

3.Знайти кут між площинами $5x + 3y + z - 18 = 0$,

$$2y + z - 9 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, \quad 4x + y - 6z - 5 = 0.$$

Варіант 24

1.Дано рівняння лінії $x^2 + 9y^2 = 9$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(1,-5,-2), B(6,-2,1), C(2,-2,-2).

3.Знайти кут між площинами $4x + 3z - 2 = 0$,

$$x + 2y + 2z + 5 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, \quad 5x + 9y + 4z - 25 = 0.$$

Варіант 25

1.Дано рівняння лінії $4y^2 = -x$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(0,7,-9), B(-1,8,-11), C(-4,3,-12).

3.Знайти кут між площинами $x + 4y - z + 1 = 0$,

$$2x + y + 4z - 3 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad x + 4y + 13z - 23 = 0.$$

Варіант 26

1.Дано рівняння лінії $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 6$. вести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-3,-1,7), B(0,2,-6), C(2,3,-5).

3.Знайти кут між площинами $2y + z - 9 = 0$,

$x - y + 2z - 1 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, \quad 3x - 2y + 5z - 3 = 0.$$

Варіант 27

1.Дано рівняння лінії $9x^2 + 5y^2 = 45$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(5,3,-1), B(0,0,-3), C(5,-1,0).

3.Знайти кут між площинами $2x - 6y + 14z - 1 = 0$,

$$5x - 15y + 35z - 3 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, \quad 3x - y + 4z = 0.$$

Варіант 28

1.Дано рівняння лінії $5x^2 - 4y^2 = 20$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-1,2,-2), B(13,14,1), C(14,15,2).

3.Знайти кут між площинами $x - y + 7z - 1 = 0$,

$2x - 2y - 5 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 2y - 5z - 16 = 0.$$

Варіант 29

1.Дано рівняння лінії $x^2 + (y - 3)^2 = 9$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(7,-5,0), B(8,3,-1), C(8,5,1).

3.Знайти кут між площинами $3x - y - 5 = 0$, $2x + y - 3 = 0$.

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+1}{-2}, \quad 3x - 7y - 2z + 7 = 0.$$

Варіант 30

1.Дано рівняння лінії $(x+5)^2 + y^2 = 9$. Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат Оу.

2.Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-3,6,4), B(8,-3,5), C(10,-3,7).

3.Знайти кут між площинами $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$,

$$x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0.$$

4.Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad 2x + y + 7z - 3 = 0.$$

Зразок розв'язання задачі

Задача. Дано рівняння лінії: 1) $3x^2 - 5y^2 = 15$;

2) $3x^2 + 16y^2 = 48$; 3) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 18$;

$$4)\ y^2 = 5x; \quad 5)\ x^2 = -3y.$$

Звести рівняння до канонічного виду, встановити вид лінії, знайти основні параметри і побудувати лінію в системі координат хОу.

Розв'язання: 1) Поділимо обидві частини рівняння

$3x^2 - 5y^2 = 15$ на 15. Одержимо: $\frac{3x^2}{15} - \frac{5y^2}{15} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$. Це рівняння гіперболи виду $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Знайдемо основні параметри гіперболи:

$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \approx 2{,}2$ велика піввісь;

$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ мала піввісь;

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 3} = \sqrt{8} \approx 2{,}8;$

$F_1(-\sqrt{8}; 0), F_2(\sqrt{8}; 0)$ −фокуси

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{40}}{5} \approx 1{,}26$ ексцентриситет.

2) Поділимо обидві частини рівняння

$3x^2 + 16y^2 = 48$ на 48. Одержимо: $\frac{3x^2}{48} + \frac{16y^2}{48} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1.$ Це рівняння еліпса виду $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$

Знайдемо основні параметри еліпса:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$ велика піввісь;

$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ мала піввісь;

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13} \approx 3{,}6;$

$F_1(-\sqrt{13}; 0), F_2(\sqrt{13}; 0)$ фокуси

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 0{,}9$ ексцентриситет.

$3)(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 18$ це рівняння виду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

де $x_0 = -3, y_0 = 2$, координати центру

$R = \sqrt{18} \approx 4{,}2.$ радіус кола

4) $y^2 = 5x$ − рівняння параболи $y^2 = 2px,$

вітки якої направлені вправо, вершина O(0;0).

Знайдемо основні параметри параболи:

$2p = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{5}{4}$; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, тобто,

$F\left(\frac{5}{4}; 0\right)$ – фокус; $x = -\frac{p}{2}$, тобто,

$x = -\frac{5}{4}$ – рівняння директриси.

5) $x^2 = -3y -$ рівняння параболи виду $x^2 = -2py$,

вітки якої направлені вниз, вершина O(0;0).

Знайдемо основні параметри параболи:

$2p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{4}$; $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, тобто,

$F\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ – фокус; $y = \frac{p}{2}$, тобто,

$y = \frac{3}{4}$ – рівняння директриси.

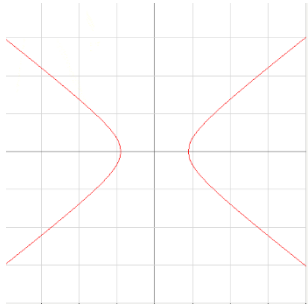


Рисунок до задачі 1)

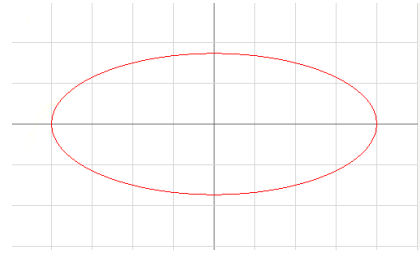


Рисунок до задачі 2)

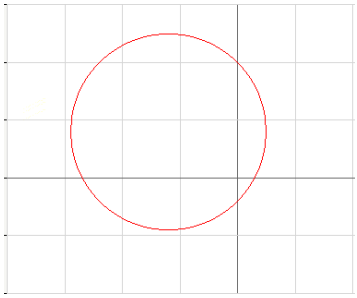


Рисунок до задачі 3)

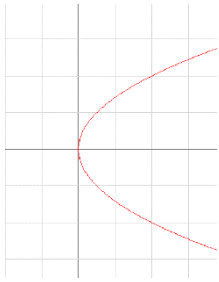


Рисунок до задачі 4)

Задача. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку А перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$, якщо

A(-1,2,7), B(3,-6,5), C(12,-7,1).

Розв'язання: рівняння площини шукаємо у вигляді

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $x_0=-1, y_0=2,$

$z_0=7-$ координати точки A.

Знайдемо координати нормального вектора площини

$$\vec{n}=\overrightarrow{BC}=\{12-3;-7+6;1-5\}=\{9;-1;-4\}=\{A;B;C\}.$$

Підставимо знайдені значення в рівняння площини:

$$9(x+1)-1(y-2)-4(z-7)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x-y-4z+9+2+28=0\Rightarrow 9x-y-4z+39=0.$$

Задача. Знайти точку перетину прямої і площини

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4},\quad x+2y+3z-14=0.$$

Розв'язання: координати точки перетину прямої

і площини є розв'язком системи їхніх рівнянь. Знайдемо цей розв'язок:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4} \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = t \\ \dfrac{y-3}{-1} = t \\ \dfrac{z+1}{4} = t \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -t+2 \\ y = -t+3 \\ z = 4t-1 \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-t+2+2(-t+3)+3(4t-1)-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t+2-2t+6+12t-3-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t-9=0 \Rightarrow t=1,$$

$$\text{тоді } \; x=-1+2=1,$$

$$y=-1+3=2, \quad z=4\cdot 1-1=3.$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow M_0(1;2;3)$ –точка перетину прямої та площини.

Тема 5. Границя функції однієї змінної

Основні формули

1) Означення границі функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

2) Означення границі функції $y = f(x)$ в нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3) Властивості границь: lim C = C; lim $(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$; lim $\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

4) Перша визначна границя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

5) Друга визначна границя: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7.$

6) Еквівалентні нескінченно малі – це такі дві функції, кожна із яких наближається до нуля, а їхнє відношення наближається до одиниці в будь-якій точці або в нескінченності, тобто, якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі, причому $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то їх називають еквівалентними нескінченно малими і пишуть: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Таблиця еквівалентних нескінченно малих при $x \to 0$: $sinax \sim ax;\ \ tgax \sim ax;\ \ arcsinax \sim ax;\ \ arctgax \sim ax;$

$$\ln(1 + x) \sim x;\ \ e^x - 1 \sim x;\ \ 1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2;\ \ \sqrt{1 + x} - 1 \sim x.$$

Задачі для розв'язання

Задача 5. Знайти вказані границі:

5.1. 1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-7x+2}{3x^5+6x^4-4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x\cos 3x}$.

5.2. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2tg^2 3x}$.

5.3. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5x^2-3x+4}{4x^2-2x-7}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+2}{4x^5-2x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,arcsin\,2x}{4\sin^2 5x}$.

5.4. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7x^2-12x+5}{5x^2-2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot tg3x}{4x^2}$.

5.5. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6+6x^2-1}{3x^2+4x^6+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{x\sin 3x}$.

5.6. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-3}{5x^2+8x^3+7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{6\sin^2 7x}$.

5.7. 1) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x^2-5}{x-5x^4-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 8x}{x\sin 5x}$.

5.8. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{5x^2+17x+6}{3x^2+8x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x+6}{6x^2-3x^3+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{tg2x\sin 3x}$.

5.9. 1) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^5-4x+1}{3x^6-2x^2+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+5}-1}{x^2+3x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,6x}{x\,sin\,3x}$.

5.10. 1) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{x^2+9x+8}{x^2+10x+16}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3+4x^2-3}{2x^4+3x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,3xtg2x}{x\,sin\,4x}$.

5.11. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^7-5x-2}{5x^7+x^6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{3x-30}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{1-cos\,4x}$.

5.12. 1) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+4x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-3x+1}{3x^7+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt{3x+7}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 3x}{6x^2}$.

5.13. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x^3-x^2-2x}{4x-3x^3+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{arcsin^2\,2x}$.

5.14. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{7x^4+3x^3+2x^2}{x^4-5x^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3xtg2x}{1-cos\,9x}$.

5.15. 1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{9x^7-3x+4}{x^3-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 2x}{1-cos\,7x}$.

5.16. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+4x-5}{x^2-5x-x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{1-cos\,4x}$.

5.17. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-x^2+x}{x^4+2x^3-x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,3x}{6x}$.

5.18. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{3x^2+8x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x+5}{x^5+5x-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-8x-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2\,6x}{x\,arctg5x}$.

5.19. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^9+4x^5+x}{5x^9+x^2-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{arctg^2 2x}$.

5.20. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^9+4x-2}{x^3-x^2+4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{x^2+x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2\,2x}{3x^2}$.

5.21. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x-3}{2x^4+2x^3-x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,6x}{2\,arcsin^2 3x}$.

5.22. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+x^2-3}{2x^5+3x^3+7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{arctg^2 5x}$.

5.23. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-5}{x^2-5x-x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} tg^2 8x\cdot ctg^2 3x$.

5.24. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}+x^3}{5x^4-3x^{10}+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}{x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2\,10x}{tg^2 4x}$.

5.25. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x-5)^2}{x^2-3x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^6-5x^3+7}{1-2x^6+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} sin^2\,2x\cdot ctg^2 7x$.

5.26. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7}{x^4+2x^7-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x+2}-\sqrt{16-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{5x^2}$.

5.27. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^6-x^5+3}{2x^5+4x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-6}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,8x}{2x^2}$.

5.28. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^3+4x^2-1}{x^3+3x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,4x}{x\,sin\,2x}$.

5.29. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{(x+2)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+4x^5-x^2}{5x^7+x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 9x}{5x\,sin\,x}$.

5.30. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+5x^2+x}{x^9-4x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-8}-\sqrt{12-x}}{x-10}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,3x}{5x^2}$.

Зразок розв'язання задачі 5

Задача. Обчислити границі:

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^8+4x^5-1}{x^3+3x^5-7};\ 2)\lim_{x\to\infty}\frac{9x^6-\mathrm{x}^3+3}{2x^5+4x^6+7};\ 3)\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2\mathrm{x}+3}{7x^5+9x+2};$$

$$4)\lim_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x^2-49};\ 5)\lim_{x\to -4}\frac{2x^2+5x-12}{x^2-6x-40};\ 6)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{4-\sqrt{1+5x}};$$

$$7)\lim_{x\to 0}(1-cos8x)\cdot ctg^2 3x;\ 8)\lim_{x\to 0}\frac{4x\,sin\,2x}{arctg^2 5x}.$$

Розв'язання. При обчисленні границь задачі 6 з'являються невизначеності виду $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \mathbf{0}\cdot\infty$. Тому потрібно зробити попередні перетворення.

Для обчислення границі відношення двох многочленів при нескінченному зростанні змінної x треба під знаком границі залишити в чисельнику та знаменнику тільки старші члени (з найбільшими показниками), провести скорочення на степінь x з меншим показником, а тоді обчислити одержану границю, підставивши замість x нескінченість. Якщо нескінченність буде в чисельнику, то границя дорівнює нескінченності; якщо в знаменнику, то границя дорівнює нулю. Якщо старші члени чисельника і знаменника мають однакові показники степеня, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших членах.

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^8+4x^5-1}{x^3+3x^5-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^8}{3x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{3}=\frac{5\cdot\infty}{3}=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to\infty}\frac{9x^6-x^3+3}{2x^5+4x^6+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^6}{4x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{4}=\frac{9}{4};$$

$$3)\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+3}{7x^5+9x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{7x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{7x^2}=\frac{4}{7\cdot\infty}=\frac{4}{\infty}=0.$$

Для обчислення границі відношення двох многочленів при прямуванні змінної x до числа x_0 за умови невизначеності $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ треба виділити в цих многочленах множник $(x - x_0)$, скоротити на нього чисельник і знаменник, а тоді обчислити границю утвореного дробу, підставивши замість x число x_0. Множник $(x - x_0)$ можна виділити двома способами: 1) поділити чисельник і знаменник на $(x - x_0)$;

2) розкласти на множники чисельник і знаменник, розв'язавши відповідні квадратні рівняння і використавши формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, (1)

де x_1 та x_2 корені кожного із цих квадратних рівнянь. В окремих випадках досить використати формули тотожних перетворень, а саме: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, (2)

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (3)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

4) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-14x+49}{x^2-49} = \frac{7^2-14\cdot 7+49}{7^2-49} = \left(\frac{0}{0}\right)$ невизначеність.

Для обчислення цієї границі треба виділити в чисельнику і знаменнику множник $(x - 7)$ і скоротити дріб. Для цього розкладемо на множники многочлени за формулами (2), (3):

$x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = (x - 7)^2 = (x - 7)(x - 7)$;

$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$. Тоді $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-14x+49}{x^2-49} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)(x+7)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-7}{x+7} = \frac{7-7}{7+7} = \frac{0}{14} = 0.$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+5x-12}{x^2-6x-40}=\frac{2(-4)^2+5(-4)-12}{(-4)^2-6(-4)-40}=\frac{32-20-12}{16+24-40}=\left(\frac{0}{0}\right)$.

Для обчислення цієї границі треба виділити в чисельнику і знаменнику множник $(x+4)$ і скоротити дріб. Для цього розкладемо на множники многочлени, розв'язавши відповідні рівняння: $2x^2+5x-12=0$;

$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 2(-12)=25+96=121=11^2;$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-11}{2\cdot 2}=\frac{-16}{4}=-4;$$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+11}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$; за формулою(1) одержимо:

$$2x^2+5x-12=2(x+4)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x+4)(2x-3).$$

Аналогічно

$$x^2-6x-40=0;D=6^2-4\cdot 1\cdot(-40)=36+160=196=14^2;$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{6-14}{2}=\frac{-8}{2}=-4;$$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{6+14}{2}=\frac{20}{2}=10$; за формулою(1) одержимо:

$x^2-6x-40=(x+4)(x-10)$. Тоді

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x^2+5x-12}{x^2-6x-40}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(2x-3)}{(x+4)(x-10)}=\lim_{x\to -4}\frac{2x-3}{x-10}$$

$$=\frac{2(-4)-3}{-4-10}=\frac{11}{14}.$$

6)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{4-\sqrt{1+5x}}=\frac{\sqrt{1+3}-2}{4-\sqrt{1+5\cdot 3}}=\left(\frac{0}{0}\right)$ –невизначеність.

Для обчислення цієї границі треба виділити в чисельнику і знаменнику множник $(x-3)$ і скоротити на нього дріб. Для цього треба чисельник і знаменник помножити на два спряжені до чисельника і знаменника множники

$(\sqrt{1+\mathrm{x}}+2)$та $(4+\sqrt{1+5x})$ і перетворити частину чисельника і знаменника за формулою (3):

$$\frac{\sqrt{1+x}-2}{4-\sqrt{1+5x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)(4+\sqrt{1+5x})}{(4-\sqrt{1+5x})(4+\sqrt{1+5x})(\sqrt{1+x}+2)}=$$

$$=\frac{\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^2-2^2\right)\left(4+\sqrt{1+5x}\right)}{\left(4^2-\left(\sqrt{1+5x}\right)^2\right)\left(\sqrt{1+x}+2\right)}=\frac{(1+x-4)\left(4+\sqrt{1+5x}\right)}{(16-1-5x)\left(\sqrt{1+x}+2\right)}$$

$=\frac{(x-3)\left(4+\sqrt{1+5x}\right)}{-5(x-3)\left(\sqrt{1+x}+2\right)}=\frac{4+\sqrt{1+5x}}{-5\left(\sqrt{1+x}+2\right)}$; тоді границя буде

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{4-\sqrt{1+5x}}=\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{1+5x}}{-5\left(\sqrt{1+x}+2\right)}=\frac{4+\sqrt{1+5\cdot 3}}{-5\left(\sqrt{1+3}+2\right)}$$

$$=\frac{4+4}{-5\cdot 4}=-\frac{2}{5}.$$

$$7)\lim_{x\to 0}(1-cos8x)\cdot ctg^2 3x=(1-cos0)\cdot ctg^2 0=$$

$(0\cdot\infty)$ −невизначеність. Оскільки $1-cos8x=$

$2\,sin^2 4\,x, ctg^2 3x=\frac{1}{tg^2 3x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1-cos8x)\cdot ctg^2 3x=\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2 4\,x}{tg^2 3x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\,4\,x}{tg3x}\right)^2.$$

Відомо, що при наближенні x до нуля $sin\,4\,x$ еквівалентне $4x$, а $tg3x$еквівалентне $3x$. Тому під знаком границі ці функції можна замінити на еквівалентні. Одержимо:

$$2\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\,4\,x}{tg3x}\right)^2 = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x}{3x}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2\cdot\frac{16}{9} = \frac{32}{9}.$$

$8)\lim_{x\to 0}\frac{4x\,sin\,2x}{arctg^2 5x} = \frac{4\cdot 0\cdot sin\,0}{arctg^2 0} = \left(\frac{0}{0}\right)$ –невизначеність.

Напишемо дану границю у вигляді добутку двох границь

$\lim_{x\to 0}\frac{4x\,sin\,2x}{arctg^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\,2x}{arctg5x}$; замінивши під знаком границі функції $sin\,2\,x, arctg5x$на еквівалентні до них функції $2x$ та $5x$, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\,2\,x}{arctg5x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{25}.$$

Відповідь: $1)\infty; 2)\frac{9}{4}; 3)0; 4)0; 5)\frac{11}{14}; 6)-\frac{2}{5}; 7)\frac{32}{9}; 8)\frac{8}{25}$.

Тема 6. Похідна функції однієї змінної

Основні формули

1) Означення похідної функції $y = f(x)$: похідна функції дорівнює границі відношення приросту функції до приросту змінної при умові, що останній наближається до нуля, тобто, $y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

2) Властивості похідних: похідна алгебраїчної суми функцій рівна алгебраїчній сумі похідних, тобто, $(u \pm v)' = u' \pm v'$; числовий множник виноситься за знак похідної:$(cu)' = cu'$

похідна добутку $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

похідна частки

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

3) Таблиця похідних:

1. $(\mathrm{c})' = 0$; 2. $(\mathrm{x})' = 1$; 3. $(x^2)' = 2x$;

4. $(\mathrm{x}^3)' = 3\mathrm{x}^2$; 5. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

7. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 8.$(a^x)' = a^x \ln a$; 9. $(e^x)' = e^x$;

10. $(log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 12.$(\sin x)' = \cos x$;

13. $(\cos x)' = -\sin x$; 14. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

15. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 16. $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

17. $(arccos\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; 18. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

19. $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

4) Похідна складної функції $y = f(g(x))$ дорівнює добутку похідної f'_g зовнішньої функції на похідну g'_x внутрішньої функції, тобто, $f'\big(g(x)\big) = f'_g \cdot g'_x$.

5) Диференціал функції $y = f(x)$ обчислюється за формулою: $dy = y'(x)dx$.

Звідки похідна $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

6) Похідна параметричної функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ дорівнює

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

7) Неявною називається функція, задана рівнянням виду $F(x, y) = 0$. Щоб знайти похідну $y'(x)$ неявної функції, треба знайти похідну обох частин рівняння, пам'ятаючи, що y функція від x, і з одержаного рівняння знайти y'.

8) Метод логарифмічного диференціювання полягає в тому, що перед диференціюванням функцію логарифмують, а тоді знаходять похідну від утвореної неявної функції. Цей метод використовують для знаходження похідної степенево-показникової функції виду $y = (f(x))^{\varphi(x)}$.

Задачі для розв'язання

Задача 6. Знайти похідні даних функцій:

6.1. 1) $y = 3x - 4\sqrt[3]{x} + 2$; 2) $y = \frac{4x+7tgx}{1+9x^2}$;

3) $y = cos\,3\,x \cdot e^{sin\,x}$; 4) $y = ln\,a\,rctg2x$;

5) $x^3 + y^3 + 3x^2 = 0$; 6) $\begin{cases} x = e^t\,cos\,t \\ y = e^t\,sin\,t \end{cases}$;

7) $y = 2^{tgx} + x\,sin\,2\,x$; 8) $y = \left(2x + 3\ \right)^{tgx}$.

6.2. 1) $y = 3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1$; 2) $y = \frac{arcsin\,3x}{1-8x^2}$;

3) $y = 2^{3x} \cdot tg2x;$ 4) $y = cosln\,5\,x;$

5) $sin\,x - arctgy = 0;$ 6) $\begin{cases} x = a(t - sin\,t), \\ y = a(1 - cos\,t); \end{cases}$

7) $y = 2^{x^2+1} - x\,sin\,x\,;$ 8) $y = (1 + cos\,x)^{x^2}.$

6.3. 1) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + 5\sqrt{x};$ 2) $y = \frac{arcsin\,7x}{x^4+e^x};$

3) $y = e^{tgx} \cdot ln\,2\,x;$ 4) $y = cos\,\sqrt{x^2 + 3}\,;$

5) $x + ln\,x + \sqrt{3 + 2y} = 0;$ 6) $\begin{cases} x = 2t^3, \\ y = 4t^2 + 2t; \end{cases}$

7) $y = e^{tgx} - \sqrt{x} \cdot cos\,2\,x;$ 8) $y = (x^3 + 2)^{sin\,x}.$

6.4. 1) $y = 4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4;$ 2) $y = \frac{sin\,2x}{cos\,5x};$

3) $y = 2^{8x} \cdot tg3x;$ 4) $y = arcsinln\,4\,x;$

5) $arctgx - ln\,\sqrt{2y + 3} = 0;$ 6) $\begin{cases} x = sin\,t + cos\,t\,, \\ y = e^t \cdot cos\,t\,; \end{cases}$

7) $y = xtg3x + 2^{x-2};$ 8) $y = (x^2 + 1)^{arctgx}.$

6.5. 1) $y = x^5 - \sqrt[3]{x} + 1;$ 2) $y = \frac{1-4x^2}{2^x+tgx};$

3) $y = e^{ctgx} \cdot sin\,4\,x;$ 4) $y = sinln\,5\,x;$

5) $x\,ln\,x - e^y + 1 = 0;$ 6) $y = 3^{sin\,x} - \sqrt[3]{x} \cdot tg3x;$

7) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t; \end{cases}$ 8) $y = (arcsin\,x)^{\sqrt{1-x^2}}.$

6.6. 1) $y = 6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5;$ 2) $y = \frac{cos\,3x}{3x^2+4};$

3) $y = 3^{tgx} \cdot arcsin\,x^2\,;$ 4) $y = lnsin\,6\,x;$

5) $tgx + ln(2y + 1) = 0;$ 6) $y = 5^{\sqrt{x}} - x^2 tg2x;$

7) $\begin{cases} x = cos\,5\,t, \\ y = sin\,5\,t; \end{cases}$ 8) $y = (x + sin\,x)^{x^2}$.

6.7. 1) $y = x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + 2$; 2) $y = \frac{arctg7x}{2-9x^2}$;

3) $y = e^{ctgx} \cdot cos\,6\,x$; 4) $y = sinln\,2\,x$;

5) $sin\,x + \sqrt{2x + y} = 0$; 6) $y = arcsin\,3\,x - \sqrt{1 - 9x^2}$;

7) $\begin{cases} x = sin\frac{t}{2}, \\ y = cos\,t\,; \end{cases}$ 8) $y = (tg2x)^{ctg2x}$.

6.8. 1) $y = x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4$; 2) $y = \frac{x^3+e^x}{4-9x^5}$;

3) $y = 4^{cos\,x} \cdot arctg2x$; 4) $y = lncos\,5\,x$;

5) $arcsin\,x - ln(x + 2y) = 0$; 6) $y = 2^{arctgx} + ln(1 + x^2)$;

7) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = cos\,t\,; \end{cases}$ 8) $y = (x + 1)^{arctgx}$.

6.9. 1) $y = 3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2$; 2) $y = \frac{cos\,6x}{sin\,3x}$;

3) $y = e^{x^2} \cdot tg7x$; 4) $y = arcsinln\,2\,x$;

5) $x + sin\,x - 3y^2 = 0$; 6) $y = 3^{cos\,x} + sin^2\,3\,x$;

7) $\begin{cases} x = 2\,ln\,c\,tgt, \\ y = tgt + ctgt; \end{cases}$ 8) $y = (ctgx)^{cos\,x}$.

6.10. 1) $y = x^4 + 2\sqrt[3]{x} + 1$; 2) $y = \frac{3-5x^3}{e^x-ctgx}$;

3) $y = 2^{sin\,x} \cdot arcsin\,2\,x$; 4) $y = lncos\,7\,x$;

5) $2xy + arcsin\,x + 1 = 0$; 6) $y = 2^{x^2} + arccos\,x$;

7) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^3}; \end{cases}$ 8) $y = (x + ln\,x)^{\frac{1}{x}}$.

6.11. 1) $y = 3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7$; 2) $y = \frac{x^4 + tgx}{4x^2 + 7}$;

3) $y = e^{arcsin\, x} \cdot ctg3x$; 4) $y = arctg\, ln\, 8\, x$;

5) $5x - arctgx + 2y^4 = 0$; 6) $y = 4^{tg2x} - xtg2x$;

7) $\begin{cases} x = cos\frac{t}{2}, \\ y = t - sin\, t; \end{cases}$ 8) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

6.12. 1) $y = 2x^4 - 3\sqrt[3]{x} - 1$; 2) $y = \frac{2 - x^2}{cos\, x}$;

3) $y = 5^{arctgx} \cdot sin\, 4\, x$; 4) $y = lnarcsin\, 3\, x$;

5) $2x + ln\, y + 3\sqrt{x} = 0$; 6) $y = 3^{arctg2x} - ln(1 + 4x^2)$;

7) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = ln(1 + t^2) \end{cases}$; 8) $y = (arcsin\, x)^{\sqrt{x}}$.

6.13. 1) $y = 3x^5 + 2\sqrt[4]{x} - 8$; 2) $y = \frac{ctgx - cos\, x}{5x^2 + 1}$;

3) $y = e^{x^2} \cdot arcsin\, 2\, x$; 4) $y = arctg\, ln\, 5\, x$;

5) $2x + 3y^2 + 5\, sin\, x = 0$; 6) $y = 4^{cos\, x} - cos^2\, x$;

7) $\begin{cases} x = t - lnsin\, t, \\ y = t + lncos\, t; \end{cases}$ 8) $y = (tg2x)^{cos\, 2x}$.

6.14. 1) $y = x^3 - \frac{3}{x^2} + 4$; 2) $y = \frac{2 - 3x^5}{sin\, 2x}$;

3) $y = 4^{tgx} \cdot arctg3x$; 4) $y = lncos\, 4\, x$;

5) $ln(3x + y) + 2\, cos\, x - 3 = 0$; 6) $y = 5^{tg^2 x} + lnsin\, x$;

7) $\begin{cases} x = t^2 + 4\, sin\, t, \\ y = tgt + \frac{4}{t}; \end{cases}$ 8) $y = (1 - x^2)^{arcsin\, x}$.

6.15. 1) $y = 5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2$; 2) $y = \frac{2^x + ctgx}{4 + 2x^3}$;

3) $y = e^{sin\, x} \cdot arccos\, 3\, x$; 4) $y = arctg\, ln\, 7\, x$;

5) $5y^2 + lnsin\,5x = 0;$ 6) $y = 2^{arccos\sqrt{x}} - \sqrt{1-x};$

7) $\begin{cases} x = arcctgt, \\ y = \frac{1}{1+t^2}; \end{cases}$ 8) $y = (ctg4x)^{sin\,4x}.$

6.16. 1) $y = 2x^4 + \frac{2}{x^3} - 7;$ 2) $y = \frac{1-7x^5}{cos\,4x};$

3) $y = 5^{6x} \cdot arcsin\,5x;$ 4) $y = lnsin\,7x;$

5) $2\,sin\,y - 3\,cos\,x + 5 = 0;$ 6) $y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x};$

7) $\begin{cases} x = e^t\,cos\,t\,, \\ y = e^t\,sin\,t\,; \end{cases}$ 8) $y = (sin\,3x)^{tgx}.$

6.17. 1) $y = 3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5;$ 2) $y = \frac{2x^2 - ctgx}{6x^2+5};$

3) $y = e^{arcsin\,x} \cdot cos\,4x;$ 4) $y = arctg\,ln\,5x;$

5) $ln\,y = x - 3y;$ 6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$

7) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t}{t+1}; \end{cases}$ 8) $y = (x^4 + 1)^{\frac{1}{x}}.$

6.18. 1) $y = x^6 + \frac{3}{x^4} - 8;$ 2) $y = \frac{2-5x}{sin\,3x};$

3) $y = 4^{arctgx} \cdot cos\,6x;$ 4) $y = lnarcsin\,2x;$

5) $2x^2 + 4\,cos\,x - y^3 = 0;$ 6) $y = x\sqrt{x^2+1};$

7) $\begin{cases} x = ctgt, \\ y = \frac{1}{cos^2 t}; \end{cases}$ 8) $y = (cos\,2x + 1)^{tgx}.$

6.19. 1) $y = 4x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} - 7;$ 2) $y = \frac{cos\,x - 4x^3}{8+7x^5};$

3) $y = e^{sin\,x} \cdot arctg3x;$ 4) $y = sinln\,7x;$

5) $3x^2 + sin(x+y) = 0$; 6) $y = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

7) $\begin{cases} x = 3\,cos^2 t\,, \\ y = 2\,sin^3 t\,; \end{cases}$ 8) $y = (ctgx)^{sin^2 x}$.

6.20. 1) $y = 3x^2 - \frac{5}{x^3} + 1$; 2) $y = \frac{4x^5-2}{sin\,7x}$;

3) $y = 2^{arctgx} \cdot arcsin\,2\,x$; 4) $y = lncos\,6\,x$;

5) $x + cos\,x = cos\,y\,;$ 6) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;

7) $\begin{cases} x = 3(cos\,t + t\,sin\,t), \\ y = 3(sin\,t - t\,cos\,t); \end{cases}$ 8) $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$.

6.21. 1) $y = 1{,}5x^4 - 7\sqrt[7]{x^3} - 8$; 2) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

3) $y = e^{sin\,x} \cdot ln\,3\,x$; 4) $y = ln\,a\,rctg\sqrt{x}$;

5) $y\,sin\,x - x\,cos\,y = 0$; 6) $y = ln\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-2}}$;

7) $\begin{cases} x = a\,cos^2 t\,, \\ y = c\,sin^2 t\,; \end{cases}$ 8) $y = (x+1)^{sin\,x}$.

6.22. 1) $y = 6x^8 - \frac{2{,}5}{x^4} + 2$; 2) $y = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

3) $y = 2^{x^2} \cdot cos\,3\,x$; 4) $y = x\,arccos\,x - \sqrt{1-x^2}$;

5) $tgy - xy = 0$; 6) $y = ln\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$;

7) $\begin{cases} x = a\,cos^3 t\,, \\ y = b\,sin^3 t\,; \end{cases}$ 8) $y = (sin\,x + 1)^x$

6.23. 1) $y = 0{,}4x^5 - 9\sqrt[3]{x^7} - 6$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $y = 5^{cos^2 x} \cdot sin\,x\,;$ 4) $y = arcsinlncos\,x\,;$

5) $cos(xy) - 2x = 0$; 6) $y = ln\sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$;

7) $\begin{cases} x = t + lnsin\, t\,, \\ y = t - lncos\, t\,; \end{cases}$ 8) $y = (cos\, x)^{x^2}$.

6.24. 1) $y = 1{,}3x^4 - \frac{9}{x^6} + ln\, 3\,;$ 2) $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

3) $y = 2^{tgx} \cdot arcsin\, 3\, x$; 4) $y = ln\, t\, g\, \frac{x}{2}$;

5) $e^x - e^{-2y} + xy = 0$; 6) $y = ln\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}$;

7) $\begin{cases} x = t^2 e^t, \\ y = 3t^2 + t^3; \end{cases}$ 8) $y = (arctgx)^x$

6.25. 1) $y = 0{,}25x^4 - 5\sqrt[5]{x^3} + tg2$; 2) $y = \frac{3+x}{\sqrt{1-x}}$;

3) $y = 2^{sin^2 x} \cdot cos\, 2\, x$; 4) $y = arcsin\sqrt{1-4x}\,;$

5) $arctgy - x - y = 0$; 6) $y = ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$;

7) $\begin{cases} x = t^2 + ln\, t\,, \\ y = 2t^3 + 3t; \end{cases}$ 8) $y = x^{ln\, x}$.

6.26. 1) $y = \frac{2}{3}x^6 - \frac{7}{x^6} + sin\, 6\,;$ 2) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2-5x+1}}$;

3) $y = 3^{sin\, x} \cdot sin\, 2\, x$; 4) $y = ln\, t\, ge^{2x}$;

5) $x\, ln\, y - y\, ln\, x - 1 = 0$; 6) $y = ln\sqrt[4]{\frac{4x-3}{4x+3}}$;

7) $\begin{cases} x = sin\, t - cos\, t\,, \\ y = e^t\, sin\, t\,; \end{cases}$ 8) $y = (x+1)^{\sqrt{x}}$.

6.27. 1) $y = 5x^3 - 8\sqrt[3]{x^2} - 19$; 2) $y = \frac{arcsin\,6x}{x^3+2e^x}$;

3) $y = 2^{5x} \cdot tg3x$; 4) $y = sinln\,6\,x$;

5)$ctgx + ln(3y + 2) = 0$;6)$y = arcsin\,4\,x - \sqrt{1 + 16x^2}$;

7) $\begin{cases} x = e^{6t}, \\ y = sin\,t\,; \end{cases}$ 8) $y = (ctgx)^{cos\,x}$.

6.28. 1) $y = 2x^4 + \sqrt[3]{x} + 8$; 2) $y = \frac{x^6+ctgx}{3x^2+5}$;

3) $y = 6^{arctgx} \cdot cos\,2\,x$; 4) $y = lnarccos\,5\,x$;

5) $ln(2x + 3y) + 5\,cos\,x - 8 = 0$6)$y = 5^{arcsin\sqrt{x}} - \sqrt{2 - 3x}$;

7) $\begin{cases} x = e^t\,sin\,t\,, \\ y = e^t\,cos\,t\,; \end{cases}$ 8) $y = (x^3 + 2)^{\frac{1}{x}}$.

6.29. 1) $y = x^9 + \frac{2}{x^3} - 11$; 2)$y = \frac{3x^6-1}{cos\,5x}$;

3)$y = 4^{x^2} \cdot sin\,7\,x$; 5)$e^x - e^{5y} + 3xy = 0$;

6)$y = ln\sqrt{\frac{4x-7}{3x+2}}$; 7)$\begin{cases} x = t^2e^t, \\ y = 2t^3 + t^2; \end{cases}$

8)$y = (cos\,x + 3)^{ln\,x}$

6.30. 1)$y = 5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2$; 2)$y = \frac{5x+x^3}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $y = e^{arctgx} \cdot ln\,4\,x$; 4) $y = lnsin\sqrt{x - 5}$;

5) $5\,sin\,y - 3\sqrt{x} + 6 = 0$; 6)$y = \sqrt{2x + 1} + \sqrt[3]{x + sin\,x}$;

7) $\begin{cases} x = t^2 + 2\,sin\,t\,, \\ y = ctgt + \frac{2}{t}; \end{cases}$ 8) $y = (cos\,x + sin\,x)^{tgx}$.

Зразок розв'язання задачі 6

Знайти похідні даних функцій:

1) $y = 2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1.$

$$y' = \left(2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1\right)' = (2x^5)' - \left(3x^{\frac{3}{2}}\right)' + 0 =$$

$$= 2 \cdot 5x^4 - -3 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 10x^4 - \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} = 10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}.$$

2) $y = \frac{\cos 7x}{1-3x^4}.$

$$y' = \left(\frac{\cos 7x}{1-3x^4}\right)' = \frac{(\cos 7x)' \cdot (1-3x^4) - \cos 7x \cdot (1-3x^4)'}{(1-3x^4)^2} =$$

$$= \frac{-7\sin 7x \cdot (1-3x^4) + 12x^3 \cos 7x}{(1-3x^4)^2}.$$

3) $y = 3^{tgx} \cdot \sin 5x.$

$$y' = (3^{tgx})' \sin 5x + 3^{tgx} (\sin 5x)' =$$

$$= 3^{tgx} ln3 (tgx)' \sin 5x + 3^{tgx} \cdot 5 \cos 5x =$$

$$= 3^{tgx} ln3 \cdot \frac{1}{cos^2 x} \cdot \sin 5x + 5 \cdot 3^{tgx} \cos 5x =$$

$$= \frac{3^{tgx} ln3 \sin 5x}{cos^2 x} + 5 \cdot 3^{tgx} \cos 5x.$$

4) $y = ln\sqrt[5]{\frac{x^2-7}{2x+3}} = ln\left(\frac{x^2-7}{2x+3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} ln(x^2 - 7) - \frac{1}{5} ln(2x + 3).$

$$y' = \left(\frac{1}{5} ln(x^2 - 7) - \frac{1}{5} ln(2x + 3)\right)' =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^2-7} \cdot (x^2-7)' - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot (2x+3)' =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{x^2-7} - \frac{2}{2x+3}\right).$$

5) $y = 3^{arctg\sqrt{x}} - x\cos x.$

$$y' = \left(3^{arctg\sqrt{x}}\right)' - (x\cos x)' = 3^{arctg\sqrt{x}} ln3 \left(arctg\sqrt{x}\right)' -$$

$$-(x)'\cos x - x(\cos x)' = 3^{arctg\sqrt{x}} ln3 \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} (\sqrt{x})' -$$

$$-\cos x - x(-\sin x) = \frac{3^{arctg\sqrt{x}} ln3}{2\sqrt{x}(1+x)} - \cos x + x\sin x.$$

6) $\begin{cases} x = sin^2 t \\ y = cos^3 t \end{cases}.$

$$x'(t) = (sin^2 t)' = 2sint(sint)' = 2sintcost;$$

$$y'(t) = (cos^3 t)' = 3cos^2 t(cost)' = -3cos^2 tsint;$$

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{2sintcost}{3cos^2 tsint} = -\frac{2}{3cost}.$$

Тема 7. Застосування похідної

Основні формули

1) Геометричний зміст похідної: кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ дорівнює значенню похідної в точці дотику x_0, тобто, $k_{\text{дотичної}} = y'(x_0)$.

2) Механічний зміст похідної: при прямолінійному русі матеріальної точки за законом $s = s(t)$ миттєва швидкість рівна похідній від шляху по часу, а прискорення похідній від швидкості по часу, тобто, $v(t) = s'(t);\ \ a(t) = v'(t)$.

3) Правило Лопіталя: границя відношення нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних, якщо остання існує, тобто,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \twoheadrightarrow$$

4) Рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 мають , відповідно, вигляд

$$y - y_0 = y_0{}'(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{y_0{}'}(x - x_0),$$

де $y_0 = y(x_0),\ y_0' = y'(x_0)$.

5) Функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на даному інтервалі тоді і тільки тоді, коли її похідна y' додатна (від'ємна) на ньому.

6) Необхідні умови екстремуму функції $y = f(x)$: якщо функція має екстремум (мінімум або максимум) в точці x_0, то значення похідної y' в цій точці дорівнює нулю або не існує. Точка x_0, в якій $y' = 0$ або $y' = \infty$, називається критичною точкою.

7) Достатні умови екстремуму функції $y = f(x)$: Якщо при переході через критичну точку x_0, яка належить до

області визначення функції, похідна y' змінює свій знак, то в цій точці функція має екстремум (мінімум або максимум).

8) Достатні умови опуклості (вгнутості) кривої $y = f(x)$: якщо на даному інтервалі друга похідна y'' додатна (від'ємна), то крива вгнута (опукла) на цьому інтервалі.

9) Умови існування точки перегину кривої $y = f(x)$: якщо $y''(x_0) = 0$, і при переході через точку x_0 друга похідна y'' змінює свій знак, то x_0 є абсцисою точки перегину.

Контрольна робота

Варіант 1

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої:

$y = 2x^2 + 3x - 5$ в точці $x_0 = -2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом:

$s(t) = 2t^4 - 3t^2 + t - 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin 5x}{tgx}$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

Варіант 2

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = 3x^2 - 4x + 5$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t^4 - 2t^2 - t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin 5x}{10x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Варіант 3

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^2 - 5x + 1$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом: $s(t) = 2t^4 + 4t^2 - 5t - 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x - x^2}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

Варіант 4

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 5x^2 - x + 4$ в точці $x_0 = -3$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом:

$s(t) = t^4 + t^2 - 3t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{e^x+x-1}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$.

Варіант 5

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^4 - 2t^2 + t - 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-3x^2}{\sin x-x^2}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$.

Варіант 6

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 + x - x^3$ в точці $x_0 = -2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 3t^4 - t^2 + 2t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x^2-2x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Варіант 7

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 2x + x^4$ в точці $x_0 = -2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^4 - 3t^2 - t + 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{3\sin x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$.

Варіант 8

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^3 + 3x^2 - 8$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 4t^4 + 2t^2 - 7t - 3$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\sin x}{2x^2+4x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$.

Варіант 9

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 3x + 6$ в точці $x_0 = 3$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом: $s(t) = 2t^4 - 3t^3 + t^2 - 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{3\sin x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$.

Варіант 10

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 2x - 3$ в точці $x_0 = -3$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 4t^4 - 3t^2 - 2t - 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+8x}{3\sin x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину і побудувати її графік: $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$.

Варіант 11

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 4 - 2x - x^3$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^4 - 3t^3 - 3t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{\sin x+x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$.

Варіант 12

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 4x^2 - 5x - 7$ в точці $x_0 = 1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = t^5 - 2t^3 + 4t^2 - 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+x-1}{\sin x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$.

Варіант 13

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 3x^2 - 5$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^4 - 3t^2 + 5t - 8$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-x^2}{e^x-x-1}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$.

Варіант 14

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^2 - 3x + 8$ в точці $x_0 = 1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 3t^4 + t^2 - 2t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{x2 \quad +7x}{sin\, x-2x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину і побудувати її графік: $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$.

Варіант 15

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^2 + 3x - 5$ в точці $x_0 = 1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t^4 - 2t^2 - t^2 + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$.

Варіант 16

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^2 - x^3 + 3$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 4t^4 - 3t^3 - 2t^2 - 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-2\sin x}{x-x^2}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$.

Варіант 17

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 3x + 3$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^4 - 2t^3 + t^2 - 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x-x^2}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$.

Варіант 18

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 1 + 3x^2 - 2x$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 3t^4 – t^3 + 2t^2 + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\,4x - x}{2x + tg3x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$.

Варіант 19

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 1 + x^2 - 2x$ в точці $x_0 = -3$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^4 - 3t^3 – t^2 + 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\,x}{x^2}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$.

Варіант 20

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 2x - 3$ в точці $x_0 = 4$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 4t^4 + 2t^3 - 7t - 3$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 1} \frac{3\ln x}{1-x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину і побудувати її графік: $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$.

Варіант 21

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x - 2x^3 + 1$ в точці $x_0 = 1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t^4 + t^3 - 2t^2 + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\ln x - 3}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 9x^2 - 2x^3 - 12x + 3$.

Варіант 22

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 + 10x - 3$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 2t^4 + 4t^2 - 5t + 2$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{e^x-3x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 6x^2 - x^3 - 9x - 2$.

Варіант 23

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 4x^3 - x + 9$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^4 + 5t^3 + 2t$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 2$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x-7}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 3x^2 - x^3 + 9x + 8$.

Варіант 24

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - x^2 + 2x - 2$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 2t^4 + 4t^2 + 6t + 1$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{arcsin\, 6x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 9x^2 - x^3 - 24x + 12$.

Варіант 25

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = 2x^2 - x^3 + 2x$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 7t^4 + 2t^2 - 8t + 8$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{3x-sin\, 6x}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

Варіант 26

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = 3x - x^2 + 2x^4$ в точці $x_0 = 3$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 6t^4 + 3t^2 - 12t + 31$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4-3\cos x - e^x}{arctg6x}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

Варіант 27

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^4 + 14t^2 - t + 13$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x - 2x + 3}{\ln x + 5x - 8}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 9$.

Варіант 28

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^3 - x + 2x^2$ в точці $x_0 = -2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 8t^4 + 14t^2 + t + 15$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - \sin x + 2}{3e^{3x} - 2x - 1}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$.

Варіант 29

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = 2x^3 - 3x^2 + x$ в точці $x_0 = 2$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = t^4 - 5t^2 + 16t + 7$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin 5x + 3x}{3e^{x} - 8\cos x + 5}.$$

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$.

Варіант 30

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = -x^3 - 3x^2 + 4x$ в точці $x_0 = -1$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом

$s(t) = 3t^4 - 4t^2 + 8t - 78$. Знайти значення швидкості і прискорення в момент часу $t_0 = 1$.

3. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2e^x+\cos x}{\sin 6x-3x^2}$.

4. Знайти екстремуми функції, точки перегину та побудувати її графік: $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

Зразки розв'язання задач

Задача 1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 4x^2 - 5x - 7$ в точці $x = -3$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції в точці $x = -3$:

$$y_0 = y(-3) = 4 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 7 = 4 \cdot 9 + 15 - 7 = 44.$$

Знайдемо похідну даної функції:

$$y' = (4x^2 - 5x - 7)' = 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 - 0 = 8x - 5.$$

Знайдемо значення цієї похідної в точці $x = -3$:

$$y'(-3) = 8 \cdot (-3) - 5 = -24 - 5 = -29.$$

Підставимо значення

$x_0 = -3$, $y_0 = 44$, $y_0' = -29$ в рівняння дотичної і нормалі:

1) рівняння дотичної: $y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)$

$$y - 44 = -29 \cdot (x + 3) \Rightarrow y - 44 = -29x - 87 \Rightarrow y = -29x - 43.$$

2) рівняння нормалі $y - y_0 = -\frac{1}{y_0'} \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 44 = -\frac{1}{-29} \cdot (x + 3) \Rightarrow 29 \cdot (y - 44) = x + 3$

$$29y - 29 \cdot 44 = x + 3 \Rightarrow x - 29y + 3 + 1276 = 0$$

$$\Rightarrow x - 29y + 1279 = 0.$$

Відповідь. Рівняння дотичної $y = -29x - 43$, рівняння нормалі $x - 29y + 1279 = 0$.

Задача 2. Знайти швидкість і прискорення прямолінійного руху матеріальної точки в момент часу t = 2с. за законом $s(t) = 5t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 2t + 7$.

Розв'язання. Як відомо, миттєва швидкість прямолінійного руху рівна похідній від шляху по часу, а миттєве прискорення рівне похідній від швидкості по часу, тобто, $v(t) = s'(t), a(t) = v'(t)$. Знайдемо миттєву швидкість і миттєве прискорення в момент часу t: $v(t) = s'(t) = (5t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 2t + 7)' == 5 \cdot 4t^3 - 3 \cdot 3t^2 + 4 \cdot 2t - 2 \cdot 1 + 0 = 20t^3 - 9t^2 + 8t - 2;$

$$a(t) = v'(t) = (20t^3 - 9t^2 + 8t - 2)'$$

$$= 20 \cdot 3t^2 - 9 \cdot 2t + 8 \cdot 1 - 0 =$$

$= 60t^2 - 18t + 8$. Знайдемо значення швидкості та прискорення в момент часу $t = 2c$: $v(2) = 20 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 2 = 20 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 16 - 2 =$

$= 160 - 36 + 16 - 2 = 138(^{м}/_{с});$

$a(2) = 60 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 8 = 60 \cdot 4 - 36 + 8 = 240 - 36 + 8 = 212(м/с^2)$.

Відповідь: $138\ м/с; 212\ {}^{м}/_{с^2}$.

Задача 3. Обчислити границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3tgx-5\sin x}{e^x-1}$.

Розв'язання. Правило Лопіталя використовують для розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ при обчисленні границь. Воно полягає в тому, що границю відношення функцій замінюють границею відношення їхніх похідних. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3tgx-5\sin x}{e^x-1} = \frac{3tg0-5\sin 0}{e^0-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(3tgx-5\sin x)'}{(e^0-1)'} = = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\cos x}-5\cos x}{e^x} = \frac{\frac{3}{\cos 0}-5\cos 0}{e^0} = \frac{\frac{3}{1}-5\cdot 1}{1} = 3-5 = -2.$

Відповідь. -2.

Задача 4. Знайти екстремуми функції, точки перегину і побудувати її графік: $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$.

Розв'язання. 1) Знайдемо екстремуми даної функції. Для цього знайдемо її похідну, прирівняємо її до нуля і знайдемо критичні точки:

$$y' = (x^3 + 9x^2 + 15x - 9)' = 3x^2 + 9 \cdot 2x + 15 \cdot 1 - 0$$
$$= 3x^2 + 18x + 15.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 18x + 15 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 6x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$a = 1, b = 6, c = 5 \Rightarrow$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - 4}{2} = \frac{-10}{2} = -5;$$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. Отже, x_1 = - 5, x_2 = - 1 критичні точки.

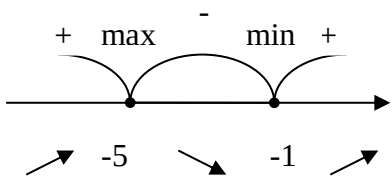


Рис. 1

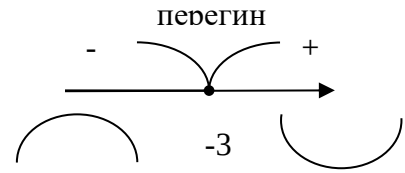


Рис. 2

Позначаємо критичні точки на числовій прямій і знаходимо знаки похідної на утворених інтервалах:

$y' = 3x^2 + 18x + 15 = 3(x + 5)(x + 1)$ $y'(-6) = 3(-6 + 5)(-6 + 1) = 3 \cdot (-1) \cdot (-5) = 15 > 0$

$y'(-2) = 3(-2 + 5)(-2 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -9 < 0$

$y'(0) = 3 \cdot (0 + 5)(0 + 1) = 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15 > 0.$

На інтервалах (-∞; −5) та (−1; ∞) похідна додатна, тому функція зростає на цих інтервалах; на інтервалі (-5; -1) похідна від'ємна, тому функція спадає на цьому інтервалі.

Оскільки при переході через критичні точки похідна змінює свій знак, то в цих точках функція має екстремуми, а саме: $y(-1)(-1)^3(-1)^2(-1)_{min}$ =

= -1 + 9 – 15 – 9 = -16; $y(-5)(-5)^3(-5)^2(-5)_{max}$

$=-125+9\cdot 25-75-9=$ - 125 + 225 – 75 – 9 = 16.

Отже, функція має точку максимуму *A*(-5; 16) і точку мінімуму *B*(-1; -16).

2) Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості та вгнутості функції. Для цього знайдемо другу похідну, прирівняємо її до нуля і з одержаного рівняння знайдемо критичні точки 2-го роду:

$$y'' = (3x^2 + 18x + 15)' = 3 \cdot 2x + 18 \cdot 1 + 0 = 6x + 18;.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = \frac{-18}{6} = -3.$$

Отже, x = - 3 критична точка 2-го роду. Позначимо її на числовій прямій і знайдемо знак другої похідної $y'' = 6x + 18$ на утворених інтервалах (див рис.2):

$$y''(-4) = 6 \cdot (-4) + 18 = -24 + 18 = -6 < 0;.$$

$$y''(1) = 6 \cdot 1 + 18 = 24 > 0.$$

На інтервалі (-∞; -3) друга похідна від'ємна, тому графік опуклий на цьому інтервалі; на інтервалі (-3; ∞) друга похідна

додатна, тому на цьому інтервалі графік вгнутий. Оскільки при переході через критичну точку 2-го роду

x = - 3 друга похідна змінює свій знак, то в цій точці функція має перегин: $x_{\text{перегину}}$ = - 3,

$y_{\text{перегину}} = y(-3) = (-3)^3 + 9 \cdot (-3)^2 + 15 \cdot (-3) - 9 == -27 + 9 \cdot 9 - 45 - 9 = -27 + 81 - 45 - 9 = 0.$

Отже, $C(-3; 0)$ точка перегину графіка даної функції.

Знайдемо точку перетину графіка з віссю Oy, для цього підставимо у функцію $x = 0$:

$y(0) = 0^3 + 9 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 - 9 = -9$. Отже, $D(0;-9)$ точка перетину графіка з віссю Oy.

Для побудови графіка в системі координат xOy позначимо точки максимуму $A(-5;16)$,

мінімуму $B(-1; -16)$, перегину $C(-3; 0)$ та точку $D(0; -9)$ перетину графіка з віссю Oy.

Враховуючи результати досліджень, будуємо криву (див. рис.3). Оскільки змінна y набуває досить великих значень, то масштаб по осі Oy треба зменшити в чотири рази.

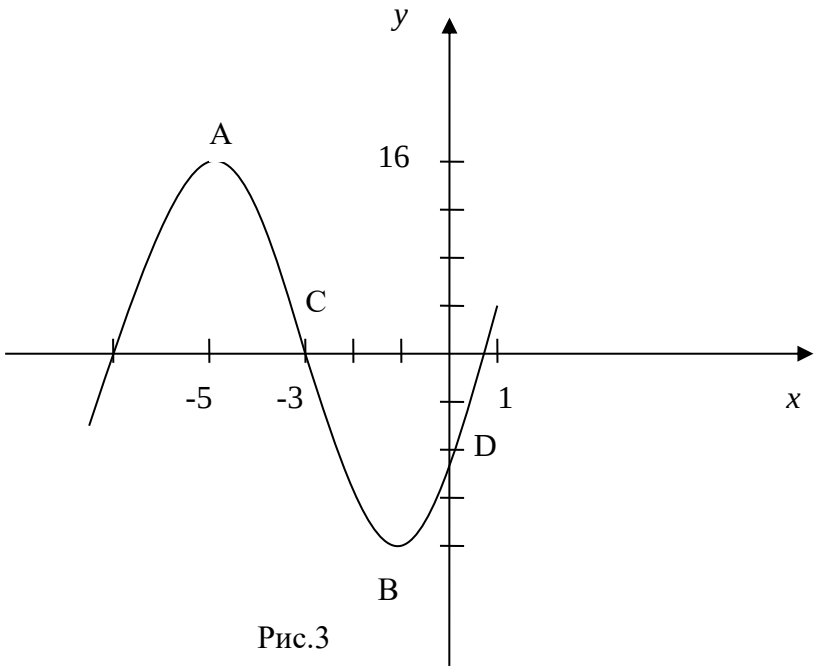


Рис.3

Список використаних джерел

1. Григор’єва, Т.І. Вища математика: методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів фахової передвищої освіти за спеціальністю 123 «Комп’ютерна інженерія» [Електронний ресурс] / Т. І. Григор’єва. – Одеса: Національний університет «ОЮА», 2021. – Режим доступу: https://dspace.onua.edu.ua/items/b7dce954-95a7-4d13-93e8-b9aa5236b949
2. Вища математика: метод. рекомендації для виконання самост. роботи здобувачами вищої освіти денної форми навчання спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» [Електронний ресурс] / Миколаївський нац. аграрний ун-т. – Миколаїв, 2020. – Режим доступу: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2442
3. Вища математика ГЕФ (ЕО, ТЗНС, НЗ, 1 курс): метод. рек. до практич. робіт [Електронний ресурс] / Житомирська політехніка. – Житомир, 2022. – Режим доступу: https://learn.ztu.edu.ua/mod/folder/view.php?id=68642
4. Вища математика. Диференціальні рівняння: метод. рекомендації до самостійної роботи студентів техніч. та екон. спец. [Електронний ресурс] / Нац. авіац. ун-т. – Київ, 2020. – Режим доступу: https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/57892

5. Вища математика. Аналітична геометрія: метод. рекомендації до самостійної роботи студентів техніч. та екон. спец. [Електронний ресурс] / Нац. авіац. ун-т. – Київ, 2020. – Режим доступу: https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/58039

6. Вища математика: метод. вказівки до практич. занять з дисципліни «Лінійна алгебра» [Електронний ресурс] / Ужгородський нац. ун-т. – Ужгород, 2021. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/59845

СЕМЕНИШИНА Ірина Віталіївна,
МАРЧУК Наталія Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти
за спеціальністю G3 Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка